

Лекции по Численным Методам.

По лекциям, Натальи Романовны Стронгиной, которые проводились в 2004-2005 году на факультете ВМК Нижегородского государственного университета имени Н.В. Лобачевского.

Набор лекций: Тернопольский А.В.

Источник: одни из лучших – письменные лекции Городецкого Е.

Для некоторых использованы лекции Добряева Д., и иногда мои собственные.

Не секрет, что довольно много экзаменов не сдается из-за неправильности и нечеткости подготовительного материала. Учеба по книгам обогащает вас, но на экзамене более полезными оказываются лекции собственно преподавателя. Они разные бывают, но эти отличаются во многом, от того, что написано в книгах, поэтому их наличие в подготовительном материале будет обязательным, если вы хотите сдать как минимум на четыре. Искусство написать толковые лекции присуще немногим, это также зависит от преподавателя. Здесь оказался именно тот случай, когда четкое прочтение лекций соединилось с высоким искусством их записывать – наслаждайтесь! .

Не забывайте, что и здесь могут быть ошибки и опечатки.

Лекция №1. (8.09.04)

Вержбицкий «Численные методы»;

Задачи курса:

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения:
 - a. Задача Коши. 2 семестр
 - b. Краевая задача. 2 семестр
2. Уравнения математической физики. Уравнения 4П:
 - a. Задача Коши. 1 семестр
 - b. Краевая задача. 2 семестр
3. Линейная алгебра:
 - a. Решение линейных систем;
 - b. Вычисление обратной матрицы;
 - c. Найти собственные пары (числа, вектора) (численные методы для больших систем)
4. Численное интегрирование. 1,2 семестр
5. Приближенное дифференцирование 1,2 семестр
6. Приближение функций 2 семестр

Задачи 4,5,6 будем рассматривать как связанные задачи. Например, нужно приближенно вычислить интеграл: заменим подынтегральную функцию более удобной функцией и интеграл от нашей функции заменим интегралом от удобной функции. Аналогично с дифференцированием.

Для решения задач УМФ приходиться комбинировать методы из разных разделов.

Общие проблемы Численных Методов.

1. Вычислительная погрешность.
2. Вычислительная устойчивость алгоритма.
3. Сходимость.

Определение 1:

M_{∞} - машинная бесконечность – наибольшее положительное число, которое можно представить в машине.

Определение:

M_0 – машинный нуль – наименьшее положительное число, которое можно представить в машине.

Определение 2:

Численный алгоритм называется вычислительно устойчивым, если вычислительная ошибка, возникающая на каждом его шаге, в дальнейшем не возрастает.

3. $Lu=f$ – дифференциальная задача, u – неизвестная функция (не решается аналитически) ставим задачу 2, которую мы можем решить:

$Lv=\phi$ v – будем рассматривать как приближение функции u .

За счет подбора параметров v подгоняют к u за счет параметров стараются добиться сходимости функции v к u .

На самом деле задачу 2 ставят как семейство задач, зависящих от некоторого параметра. При каждом значении параметра находят решение v . За счет выбора параметра стараются добиться сходимости v к u .

1-я проблема зависит от машины. 2, 3-я – проблемы математиков.

Пример: Вычисление дисперсии:

$$\exists x_i \ i=1,n \quad D_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad D_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2}{n} \text{ может дать } D_1 \neq D_2$$

Пример: $87365432+0.06=87365432.06$ если есть только 8 разрядов – получим тоже самое число.

1 Подготовка к лабораторной работе по сплайнам и интерполяции.

#1.1 Метод прогонки.

$Ax=b$

Методы решения линейных систем:

- прямые
- итерационные

Определение

Методы, которые решают задачу за конечное число арифметических действий, называются прямыми.

Определение

Методы, которые генерируют последовательность, каждый элемент которой может рассматриваться как приближение, называются итерационными.

Правило Крамера, метод Гаусса – прямые методы.

В практическом смысле прямых методов не бывает из-за вычислительной погрешности.

На практике часто встречаются задачи большой размерности, с матрицей определенной структуры. Для них придумывают специальные прямые или итерационные методы.

Метод прогонки – это прямой метод решения линейных систем с 3-х диагональной матрицей.

$(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$(1) \begin{cases} y_0 - \chi_1 y_1 = \mu_1 \\ A_1 y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -\phi_i \quad \text{Коэффициенты } \chi_1, \chi_2, A_i, C_i, B_i, i=1, n-1 \text{ - известны.} \\ -\chi_2 y_{n-1} + y_n = \mu_2 \end{cases}$$

Правая часть: $\mu_1, \mu_2, \phi_i, i=1, n-1$

$$\begin{array}{c} \| 0 \quad 1 \quad 2 \quad \backslash \quad n-1 \quad n \\ \hline 0 \quad | \quad 1 \quad -\chi_1 \quad 0 \quad] \quad 0 \quad 0 \\ 1 \quad | \quad A_1 \quad -C_1 \quad B_1 \quad] \quad 0 \quad 0 \\ 2 \quad | \quad 0 \quad A_2 \quad -C_2 \quad] \quad 0 \quad 0 \\ \vdots \quad | \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ n-1 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad] \quad -C_{n-1} \quad B_{n-1} \\ n \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \backslash \quad -\chi_2 \quad 1 \end{array} \left(\begin{array}{l} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \mu_1 \\ -\phi_1 \\ -\phi_2 \\ \vdots \\ -\phi_{n-1} \\ \mu_2 \end{array} \right) \quad (1^*)$$

Прогонка: $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \quad i=0, n-1 \quad (2)$

$\alpha_1 \setminus \alpha_n$ | $\beta_1 \setminus \beta_n$ | рассматриваются как параметры

Нужно вывести формулы для α и β , вычислить их, а затем по формулам (2) вычислить компоненты

$$\begin{cases} y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 \\ y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n \end{cases}$$

Пусть $\alpha_1 = \chi_1$, $\beta_1 = \mu_1$ подставляем y_{i-1} из (2) в систему (1).

$$A_i(\alpha_i y_i + \beta_i) - C_i y_i + \beta_1 y_{i-1} = -\varphi_i$$

$$y_i(A_i \alpha_i - C_i) + B_i y_{i+1} = -\varphi_i - A_i \beta_i$$

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$$

$$(3^{**}) \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i} \quad \beta_{i+1} = \frac{\varphi_i + A_i \beta_i}{C_i - A_i \alpha_i} \quad i = 1, n-1 \quad (3^*), (3^{**}) \text{ – это прямой ход прогонки, эти}$$

вычисления позволяют вычислить все α_i и β_i .

y_{n-1} , y_n – неизвестны μ_2 , χ_2 , α_n , β_n – известны

$$\begin{cases} -\chi_2 y_{n-1} + y_n = \mu_2 \\ y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n \end{cases} \text{ Из этого системы можно выразить } y_n = \frac{-\chi_2 \beta_n - \mu_2}{\chi_2 \alpha_n - 1} \quad (4)$$

Используя формулу (4) и формулу (2) получим все остальные y . Эти вычисления называются обратным ходом прогонки.

$$\begin{cases} y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, 0 \\ y_n = \frac{-\chi_2 \beta_n - \mu_2}{\chi_2 \alpha_n - 1} \end{cases}$$

Оценка числа действий.

	прямой ход	обратный ход	всего
Умножение	$2n-2$	$n+2$	$3n$
Деление	$2n-2$	1	$2n-1$
Слож./Выч.	$2n-2$	$n+2$	$3n$

Размерность системы (1) $(n+1)^*(n+1)$. Обозначим $m=n+1$, тогда число действий в методе прогонки выражается через размерность линейной системы, как $8m - 9$.

Замечание: для систем с 3-х диагональной матрицей большой размерности, прогонка требует числа действий порядка $\sim 8m$, а метод Гаусса $\sim m^3$.

Лекция №2 (15.09.04)

Вопросы применимости метода прогонки и ее вычислительной устойчивости.

$$\begin{cases} y_0 - \chi_1 y_1 = \mu_1 \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -\varphi_i \\ -\chi_2 y_{n-1} + y_n = \mu_2 \end{cases}$$

$$\text{Прямой ход прогонки: } \alpha_1 = \chi_1, \quad \beta_1 = \mu_1 \quad \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i} \quad \beta_{i+1} = \frac{\varphi_i + A_i \beta_i}{C_i - A_i \alpha_i} \quad i = 1, n-1$$

$$\text{Обратный ход: } y_n = \frac{-\chi_2 \beta_n - \mu_2}{\chi_2 \alpha_n - 1} \quad y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, 0$$

Есть много однотипных теорем, гарантирующих выполнения метода прогонки. Эта теорема, как и многие теоремы линейной алгебры использует диагональное преобладание.

$$A_{m \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Диагональное преобладание: $|a_{ij}| > \sum_{i \neq j}^m |a_{ij}|$, $i = 1, m$, если выполнено со знаком \geq - нестрогое диагональное преобладание.

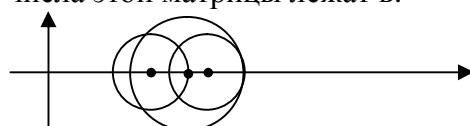
Теорема Гержгорина:

Все собственные числа квадратной матрицы, расположены на комплексной плоскости в кругах следующего вида: $|z - |a_{ii}|| \leq \sum_{i \neq j}^m |a_{ij}|$

Пример, $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ $5 > 2 > 3 > 9 > 2$ - матрица удовлетворяет строгому условию диагонального преобладания.

Все собственные числа этой матрицы лежат в:

$$\begin{aligned} |z-5| &\leq 2 \\ |z-8| &\leq 3 \\ |z-9| &\leq 2 \end{aligned}$$



У этой матрицы нет 0-х собственных чисел \Rightarrow эта матрица точно не вырожденая.

На практике часто используют условие диагонального преобладания, чтобы дать гарантию, что матрица не вырождена.

Теорема о применимости прогонки:

Пусть в системе (1) все $A_i \neq 0$, все $B_i \neq 0$,

$$(*) |C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad i=1, n-1, \quad |\chi_1| \leq 1, \quad |\chi_2| < 1$$

Тогда при любой правой части $\mu_1, \mu_2, \varphi_i, i=1, n-1$ система (1) имеет единственное решение и его можно найти методом прогонки.

Доказательство: 1) доказать знаменатель $\neq 0$

2) доказать существование решения.

$$1) |\alpha_1| = |\chi_1| \leq 1 \Rightarrow |C_i - \alpha_1 A_i| \geq ||C_i| - |\alpha_1| \cdot |A_i|| \geq ||C_i| - |A_i|| > 0, \text{ т.к. } B_i \neq 0 \text{ и } |C_i| \geq |A_i| + |B_i| > |A_i|$$

$$|\alpha_2| = \frac{|B_i|}{|C_i - \alpha_1 A_i|} \leq \frac{|B_i|}{||C_i| - |\alpha_1| \cdot |A_i||} \leq \frac{|B_i|}{||C_i| - |A_i||} \leq \frac{|B_i|}{|B_i|} = 1$$

для всех остальных α_i, β_i по индукции доказывается, что знаменатель $\neq 0$ и все $|\alpha_i| \leq 1$.

$$|1 - \alpha_n \chi_2| \geq ||1 - \alpha_n|| |\chi_2| \geq ||1 - \chi_2|| > 0 \text{ - знаменатель не обращается в 0!}$$

по усл.т.

2) По способу построению полученные y_n являются решениями системы.

по теореме Гержгорина возможно, что система вырождена.

в курсе ГА – Альтернатива Фредгольма:

1) $A_{m \times m} \quad Ax=b, \det A \neq 0 \Rightarrow \forall b \exists! x$

2) $Ax=b, \det A=0 \Rightarrow$ для некоторых b не $\exists x$ и для некоторых b \exists много решений.

По Альтернативе Фредгольма линейная система с 3-х диагональной матрицей, удовлетворяет условию (*) не вырождена. (Система имеет решение при $\forall b \Rightarrow$ возможен только 1-й вариант Альтернативы).

Вычислительная устойчивость прогонки.Определение:

Численный метод называется вычислительно устойчивым, если вычислительная погрешность возникшая на некотором шаге больше не возрастает.

Теорема:

При условиях теоремы о применимости прогонки, этот метод вычислительно устойчив.

Доказательство: обратный ход прогонки: $y_n = \{ \text{по формуле} \} y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \quad i=n-1,0$ предположим, что на некотором шаге машина вместо y_k , за счет округления, вычислила \hat{y}_k . $|y_k - \hat{y}_k|$ – вычислительная погрешность шага. $\delta_k = |y_k - \hat{y}_k|$ на следующем шаге должны вычислить $y_{k-1} = \alpha_k y_k + \beta_k$ а вычислим $\hat{y}_{k-1} = \alpha_k \hat{y}_k + \beta_k = \alpha_k (y_k - \delta_k) + \beta_k = y_{k-1} - \delta_k \alpha_k$, вычислительная погрешность следующего шага при этом составит: $\delta_{k-1} = y_{k-1} - \hat{y}_{k-1} = \delta_k \alpha_k$.

Мы рассуждаем, что новые вычислительные погрешности не появляются, а просто вычисляем последствия старой погрешности. $|\delta_{k-1}| \leq |\delta_k|$, т.к. в условиях теоремы о применимости прогонки $|\alpha_k| < 1$.

Выводы:

- 1) Есть много разных вариантов теорем об условиях применения метода прогонки.
- 2) Есть много разных вариантов самой прогонки (циклическая прогонка).
- 3) Есть матричная прогонка с блочной 3-х диагональной матрицей, на диагоналях стоят не нулевые блоки.

К истокам:

- проблемы вычислительной устойчивости – решена (теорема)
- проблема сходимости не ставиться, т.к. прогонка дает точное решение линейной системы.

	0	0	0
		0	0
0			0
	0	0	
0	0	0	

#1.2 Кубические сплайны.

План:

1. Сплайны как класс функций.
2. Интерполяция сплайнов.
3. Построение интерполяции сплайна.
4. Физический смысл кубического сплайна.
5. Сходимость сплайн-интерполяции.

$$f(x) = ae^{bx}$$

1. Обычно функция задается формулой, обслуживающей всю числовую ось, а сплайны задаются несколькими функциями, обслуживающими разные участки оси.
2. Машина вычислить e^x не может, для этого e^x нужно заменить полиномом.

Интерполяция:

Пусть существуют некоторая функция $f(x)$, для нее подбираем функцию $\phi(x)$ из некоторого класса, совпадающего с ней на некотором множестве точек.

Мы будем строить кубические сплайны, интерполирующие некоторую заданную функцию.

3. Будет разобран метод для построения сплайнов все сводится к прогонке.
4. Физический смысл кубического сплайна: есть резиновый жгут, есть доска, его прибили в точках к доске, в том числе на концах.

Жгут примет форму, минимизирующую его потенциальную энергию. «Теорема»: оказывается форма жгута совпадет с графиком некоторого кубического сплайна.

5. Речь идет о сходимости интерполирующего сплайна к конкретной функции: дана $f(x)$, $x \in [a, b]$, для нее можно построить интерполирующий сплайн, совпадающий с ней на некотором наборе точек.

Оказывается, если управлять этим набором точек и делать его все гуще и гуще и строить соответствующие интерполирующие сплайны, то ...!!! сплайн будет равномерно сходиться к функции, его производная равномерно сходиться к производной функции и 2-я производная тоже.

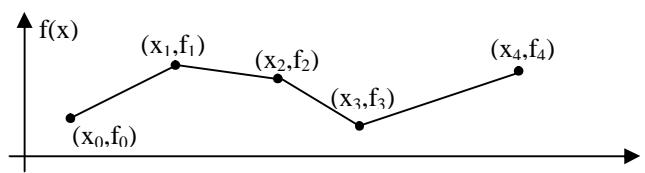
Замечания: 1) Сплайн – приближает не только функцию, но и ее производные.

2) план не списывать.

Лекция №3 (22.09.04)

1. Сплайны как класс функций.

$$\begin{cases} x \in [a, b] \\ x_0, \dots, x_n - n+1 \text{ узел} \\ h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, i = 0, n-1 - \text{шаги} (h_1, \dots, h_n) \\ x_0 = a, \dots, x_n = b \end{cases}$$



Это сетка для задания кубического сплайна на отрезке $[a, b]$

Равномерная сетка:

если $h_i = h \quad i=1, n \Rightarrow$ сетка равномерная

$$h = \frac{b-1}{n} - \text{шаг равномерной сетки.}$$

$x_{i+1} = x_i + h_{i+1}$ – если неравномерная сетка. $x_{i+1} = x_i + h = x_0 + (i+1)h$ – если сетка равномерная.

Определение:

Кубическим сплайном на отрезке $[a, b]$ на сетке называется функция $S(x)$, дважды непрерывно дифференцируемая на этом отрезке и на каждом из участков сетки, является полиномом степени не выше 3.

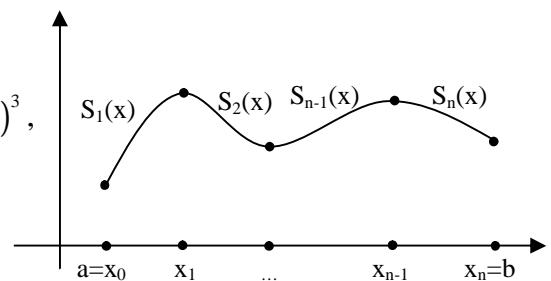
Определение:

Кубический сплайн, называется сплайном с естественными граничными условиями ЕГУ, если $S''(a)=S''(b)=0$.

Каноническая форма записи сплайна:

$$(1) S(x) = \begin{cases} S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3, \\ x \in [x_{i-1}, x_i] \end{cases}$$

Чтобы задать кубический сплайн нужно задать отрезок, сетку и величины: $a_i, b_i, c_i, d_i, i=1, n$ – т.е. всего $4n$ коэффициентов.



$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), \quad (2)$$

$$\begin{cases} S'(x_i) = S'_{i+1}(x_i), \quad (3) \quad i = 1, n-1 \\ S''(x_i) = S''_{i+1}(x_i), \quad (4) \end{cases}$$

Если нужно задать сплайн с ЕГУ, то добавляются условия: (5) $S''_1(x_0)=0$, (6) $S''_n(x_n)=0$

Чтобы задать кубический сплайн нужно придумать $4n$ коэффициентов, удовлетворяющих $3 \cdot (n-1)$ условий. Для сплайна с ЕГУ – $4n$ коэффициентов, удовлетворяющих $3(n-1)+2=3n-1$.

Например: $x \in [-1, 1] \quad [-1, 0, 1]$

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = x^3, x \in [-1, 0] \\ S_2(x) = x^3, x \in [0, 1] \end{cases} \quad S(-1) \neq 0 \quad S(+1) \neq 0 - \text{этот сплайн не является сплайном с ЕГУ.}$$

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = x^3 + 3x^2, x \in [-1, 0] \\ S_2(x) = -x^3 + 3x^2, x \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{Проверим, что эта формула задает кубический сплайн (это сплайн с ЕГУ).}$$

2) Задачи кубической сплайн – интерполяции.

$x \in [a, b]$, $f(x)$, сетка $[x_0=a, x_n=b]$, есть $f_i x_i, i=0, n$

Определение:

Кубический сплайн (1)-(4) интерполирует функцию $f(x)$, заданную на той же сетке, если в узлах сетки функция и сплайн совпадают.

$$S(x_i) = f(x_i), \quad i=0, n \quad (7)$$

Задать сплайн: 1) задать $4n$ коэффициентов. Условий: $3(n-1) + n+1 = 4n-2$. Условий меньше чем коэффициентов \Rightarrow нельзя определить сплайн единственным образом. Поэтому ищут интерполирующий сплайн, удовлетворяющий еще каким-нибудь 2-м условиям:

Например, сплайн с ЕГУ.

Обычно при подборе интерполирующего сплайна используют такие же граничные условия, какими удовлетворяла сама функция.

- 1) если $f'(a)=f'(b)=0 \Rightarrow S''(a)=S''(b)=0$
- 2) если $f''(a)=\mu_1 \quad f''(b)=\mu_2 \Rightarrow S''(a)=\mu_1 \quad S''(b)=\mu_2$
- 3) если $f'(a)=v_1 \quad f'(b)=v_2 \Rightarrow S'(a)=v_1 \quad S'(b)=v_2$
- 4) на левом и правом концах отрезка можно использовать разные условия, а так же на каком-то из концов отрезка можно использовать линейную комбинацию разных условий.

Если строить интерполирующий сплайн с 2 дополнительными граничными условиями, то есть шансы получить корректную задачу.

$4n$ – коэффициентов; $3(n-1)+(n+1)+2=4n$ – условий.

Пример: $\{-1, 0, 1\} \quad [-1, 1] \quad f(x) = x^3 \quad S(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [-1, 0] \\ x^3, & x \in [0, 1] \end{cases}$ - не единственный интерполирующий сплайн.

Построение интерполирующего кубического сплайна с естественными граничными условиями.
Есть $x \in [a, b]$. Ищем $S(x)$ в виде (1), удовлетворяющего условиям (2)-(7).

$$\left\{ \begin{array}{l} S_i(x_i) = a_i = S_{i+1}(x_i) = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3, \quad i = 1, n-1 \\ S'_i(x_i) = b_i = S'_{i+1}(x_i) = b_{i+1} + c_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{d_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 \\ S''_i(x_i) = c_i = S''_{i+1}(x_i) = c_{i+1} + d_{i+1}(x_i - x_{i+1}) \\ S''(x_0) = S''_1(x_0) = c_1 + d_1(x_0 - x_1) = 0 \\ S''(x_n) = S''_n(x_n) = c_n = 0 \quad S(x_i) = S_i(x_i) = a_i = f_i, \quad i = 1, n \\ S(x_0) = S_1(x_0) = a_1 + b_1(x_0 - x_1) + \frac{c_1}{2}(x_0 - x_1)^2 + \frac{d_1}{6}(x_0 - x_1)^3 = f_0 \end{array} \right.$$

Путем несложных преобразований системы уравнений (2*)-(7*), сводиться к линейной системе уравнений для отыскания коэффициентов c_i , а остальные коэффициенты a_i , b_i , d_i , вычисляются по явным формулам через c_i .

Эффективные параметры a_0 , c_0 . Систему (2*)-(7*) записывают через шаг сетки:

$$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, n-1 \quad h_1, \dots, h_n$$

Пример: $x_0 - x_1 = -h_1 \quad x_i - x_{i+1} = -h_{i+1}$

$$\text{новая запись (2)-(7)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i = a_{i+1} - b_{i+1}h_{i+1} + \frac{c_{i+1}}{2}h_{i+1}^2 - \frac{d_{i+1}}{6}h_{i+1}^3, \quad i = 1, n-1 \\ b_i = b_{i+1} - c_{i+1}h_{i+1} + \frac{d_{i+1}}{2}h_{i+1}^2 \\ c_i = c_{i+1} - d_{i+1}h_{i+1} \\ c_1 - d_1h_1 = 0; \quad a_i = f_i, \quad i = 1, n; \quad c_n = 0; \quad a_1 - b_1h_1 + \frac{c_1}{2}h_1^2 - \frac{d_1}{6}h_1^3 = f_0 \end{array} \right.$$

Нетрудно убедиться, что для отыскания c_i , $i=0, n$ нужно решить систему:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_i \cdot c_{i-1} + 2(h_{i+1} + h_i)c_i + h_{i+1} \cdot c_{i+1} = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), \quad i = 1, n-1 \\ c_0 = 0, \quad c_n = 0 \end{array} \right. \quad \text{система для отыскания}$$

коэффициентов c_i .

Остальные коэффициенты находим через c_i :

$$(9) \left\{ d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, n \right.$$

$$(10) \left\{ b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, n \right.$$

$$(11) \left\{ a_i = f_i, \quad i = 1, n \right.$$

(8) – это линейная система с 3-х диагональной матрицей.

Условие применимости метода прогонки выполняются.

Теорема (вывод): Для построения интерполирующего кубического сплайна с ЕГУ для некоторой функции $f(x)$, нужно решить линейную систему уравнений с 3-х диагональной матрицей, для отыскания c_i . Т.к. для этой системы условия применимости прогонки выполнены, то, во первых, систему можно решить прогонкой, а, во вторых, задача отыскания кубического сплайна имеет решение для любой функции $f(x)$.

Подсказка: если $f'(a)=\mu_1$ $f'(b)=\mu_2$ и мы ищем сплайн $S''_1(a)=\mu_1$ $S''_n(b)=\mu_2 \Rightarrow (3)-(4)$ – такие же, но $c_0=\mu_1$, $c_n=\mu_2$.

Лекция №4(29.09.04)

3) Сходимость сплайн-интерполяции.

Пусть $f(x); x \in [a,b]$ и удовлетворяет ЕГУ $f'(a)=f'(b)=0$. Рассмотрим последовательность равномерных сеток $[a,b]$.

$$x_0=a \quad x_i=x_0+ih \quad x_n=b, \quad h=\frac{b-a}{n} \text{ - равномерный шаг.}$$

Теорема:

$S_h(x)$ интерполирует $f(x)$ на сетке и удовлетворяет ЕГУ: $S''_h(a)=S''_h(b)=0$ сходится к $f(x)$ в

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - S_h(x)| \leq Mh^4$$

следующем смысле: $\max_{x \in [a,b]} |f'(x) - S'_h(x)| \leq Mh^3$ где $M = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{IV}(\xi)|$

$$\max_{x \in [a,b]} |f''(x) - S''_h(x)| \leq Mh^2$$

без доказательства.

Обсуждение теоремы: 1) При определенных условиях кубический сплайн сходится к функции $f(x)$ и ее $f'(x)$, $f''(x)$ равномерно. Мы может подобрать такой шаг сетки, чтобы она не превышала заданного числа.

2) Теорема позволяет решить следующую практическую задачу: для функции $f(x)$ удовлетворяющей условиям теоремы можно подобрать такой шаг сетки, что например:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - S_n(x)| \leq 10^{-6} \text{ Для этого нужно оценить константу } M, \text{ вычислить четвертую производную.}$$

3) Теоретический смысл теоремы.

Теорема гарантирует сходимость, знаем мы или не знаем константу M .

Для других классов сплайнов есть другие теоремы о сходимости, например, теоремы о сходимости со 2-м порядком: $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - S_h(x)| \leq Mh^2 \quad \max_{x \in [a,b]} |f'(x) - S'_h(x)| \leq Mh$

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - S_h(x)| \leq Mh^2 \quad \max_{x \in [a,b]} |f'(x) - S'_h(x)| \leq Mh$$

4) Физический смысл сплайна + экскурсия по ЕГУ.

Утверждение №1:

Пусть есть упругий резиновый жгут, который закреплен в точках $(x_i, f(x_i))$, $i=0,n$, $x_0=a$, $x_n=b$ с нулевой привязкой на концах: $f'(a)=0$, $f'(b)=0$

\Rightarrow жгут примет форму, минимизирующую потенциальную энергию, т.е. форму кубического сплайна с условиями $S(x_i)=f_i$, $i=0,n$ и ЕГУ на концах: $S''(a)=S''(b)=0$

Утверждение №2:

$x \in [a, b]$ $x_0 = b$, $i=0, n$ x_i K – класс функций непрерывно дифференцируемых, дважды непрерывно дифференцируемых и принимает в узлах сеток заданные значения: $S(x_i) = f_i$, $i=0, n$.

Нужно найти $S(x) \in K$, такую, что:

$$\forall S(x) \in K, \int_a^b (S''(x))^2 dx \leq \int_a^b (\varphi''(x))^2 dx \text{ т.е. нужно найти такую } S(x), \text{ для которой}$$

$$(1) \int_a^b (S''(x))^2 dx \rightarrow \min$$

Оказывается, что решения, задающиеся через (1), являются кубическим сплайном с условиями $S(x_i) = f_i$, $i=0, n$ и ЕГУ на концах.

Утверждение №3.

$x \in [a, b]$, $x_0 = 0$, $x_n = b$, $x: i=0, n$ K - класс непрерывно дифференцируемых, дважды кусочно непрерывно дифференцируемых функций и принимает в узлах сетки заданные значения: $S(x_i) = f_i$, $i=0, n$ и кроме того $S''(a) = \mu_1$ $S''(b) = \mu_2$.

Нужно найти: $S(x) \in K$, такую, что $\forall \varphi(x) \in K \quad \int_a^b (S''(x))^2 dx \leq \int_a^b (\varphi''(x))^2 dx$, т.е. нужно найти

$$\text{такую } S(x), \text{ для которой } (1^*) \int_a^b (S''(x))^2 dx \rightarrow \min$$

Оказывается, что решение, заданное (1*) является кубическим сплайном с условиями $S(x_i) = f_i$, $i=0, n$ и ЕГУ (т.к. они возникают не сами собой, мы их вводим в начале задачи).

Комментарии:

- 1) Утверждение №2 ставит задачу на отыскание \min потенциальной энергии и говорить о том, что решение этой задачи будет удовлетворять условиям, которые в постановке задачи не указываются, такими свойствами являются $S''(a)=0$, $S''(b)=0$ и, поэтому их называют ЕГУ.
- 2) Утверждение №3 ставит задачу на отыскание \min потенциальной энергии на более узком классе функций, удовлетворяющим дополнительным условиям $S''(a)=\mu_1$ $S''(b)=\mu_2$. Утверждение №3 говорит о том, что решение задачи минимизации будет удовлетворять тем же условиям \rightarrow решение задачи минимизации не имеют ЕГУ.

Когда употребляют термин «ЕГУ»: есть практическая задача, ее сводят к задаче оптимизации и обнаруживают, что она имеет некоторые свойства, которые принято называть естественными граничными условиями.

6) Недостатки кубических сплайнов.

Если не ПК, то 1) процедура построения сплайна трудоемка, надо решать систему линейных уравнений; 2) нет единой формулы; 3) пусть было f_i $i=0, n$ строим $S(x)$ с ЕГУ.

Пусть стало f_i , $i = 0, n$, $i \neq j$ и φ_j новый, был некий набор значений, по которым строим сплайн и этот набор изменился в одном узле \Rightarrow изменился весь набор коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i , $i=1, n$.

1) и 2) решило развитие ПК.

3) решает аппроксимирующий сплайн, от которого не требуют $S(x_i) = f_i$, $i=0, n$ (совпадение в узлах),

а требуют: 1) $\sum_{i=0}^n (f_i - S(x))^2 \leq \delta$, где δ - задано заранее, 2) При изменении значения f_i меняются

только 2 формулы для $[x_{j-1}, x_j]$ и $[x_j, x_{j+1}]$.

7) Зачем нужны сплайны.

- 1) Инженерные задачи на приближение функций (функция задана эмпирически) – например вычисление формы жгута.
- 2) Компьютерная графика (сплайн с ЕГУ).
- 3) Специальные ЧМ решения краевых задач основаны на том, что решение ищут в виде сплайна.

Лекция №5. #2. Основы численного дифференцирования.

Все формулы численного дифференцирования основаны на том, что функцию f заменяют другой функцией ψ , а производную f' на ψ' .

Существует 2 типа задач: - нужно найти производную; - производная входит в задачу, но нас не интересует.

Наиболее часто используются формулы приближенного дифференцирования, основанные на том, что функцию $f(x)$ заменили ее интерполяционными полиномом степени n . Такие формулы имеют вид: $f^{(s)}(x^*) \approx \sum_{i=0}^n c_i f_i$, где $f_i \stackrel{\text{def}}{=} f(x_i)$ и c_i – коэффициенты.

#2.1 Интерполяционные полиномы.

$f(x)$, $x \in [a,b]$ $x_i, i=0,n$ – сетка ($n+1$ узел) $f_i = f(x_i)$ – $n+1$ узел.

Нужно найти $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$: (1) $P_n(x_i) = f_i, i=0,n$

Утверждение:

Для набора данных $(x_i, f_i), i=0,n$ где $x_i \neq x_j$ решение задачи существует и единственно, и может быть записано в виде:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_{in}(x) f_i, \text{ где}$$

$$L_{in} = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) (x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$n+1$ узел \Rightarrow строим полином степени не выше n .

Доказательство: +Свойство $L_{in}(x)$ – это полином степени n , со старшим коэффициентом 1/дробь $L_{in}(x_j)=0$, при $i \neq j$ $L_{in}(x_i)=1$, т.к. численно совпадает со знаменателем.

$P_n(x)$ – это полином степени не выше n , по способу построения.

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^n L_{in}(x_j) f_i = L_{jn}(x_j) f_j = f_j \Rightarrow \text{формула (2) действительно дает решение задачи (1).}$$

Единственность: Пусть построены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ предположим $P_n(x) \neq Q_n(x)$.

Рассмотрим $R_n = P_n(x) - Q_n(x)$ – полином степени не выше n .

$R_n(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = 0$ получилось, что полином R_n имеет $n+1$ корень $\Rightarrow R_n(x) \equiv 0$ и $P_n(x)$ – единственен.

Пример:

x_i	0	1	2
f_i	0	0	7

$$i=0,2 \quad P_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} 7$$

Пример:

x_i	0	1	2
f_i	0	-1	0

$$P_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} (-1)$$

Пример:

x_i	0	1	2
f_i	5	0	0

$$P_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \cdot 5$$

Пример:

x_i	0	1	2
f_i	5	-1	7

$$P_2(x) = P_0(x) + P_1(x) + P_2(x) \text{ разложили по базису}$$

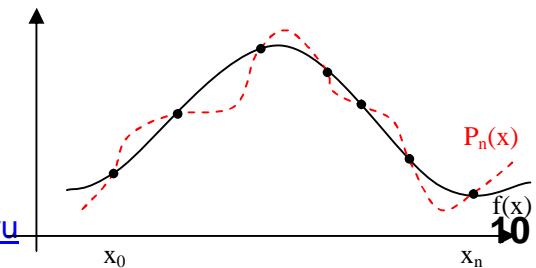
Формула (2) называется записью интерполяционного полинома в форме Лангранжа.

Погрешность интерполяции (экстраполяции).

$f(x), x_0, \dots, x_n; P_n(x)$ – интерполяционный полином для построения для $(x_i, f_i) i=0,n$

- если вычислять значение $P_n(x)$ внутри отрезка $[a,b] \Rightarrow$ это называется интерполяцией.
- если вычисляется значение $P_n(x)$ вне отрезка $[a,b] \Rightarrow$ это называется экстраполяцией.

Интерполяция и экстраполяция применяются для приближенного вычисления значений $f(x)$. Интерполяцию и экстраполяцию следует отличать друг от друга т.к.



интерполяция дает более хороший результат, чем экстраполяция (так принято).

Определение:

погрешностью интерполяции в точке x называется $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Утверждение:

Погрешность интерполяции записывается в виде.

$$(3) r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x), \text{ где } \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \text{ и } \xi \in [\min(a, x), \max(a, x)]$$

(доказательство в следующем семестре).

$$r_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)$$

интерполяция $\Rightarrow \xi \in [a, b]$ экстраполяция слева $\Rightarrow \xi \in [x, b]$ экстраполяция справа $\Rightarrow \xi \in [a, x]$

Выводы: задача интерполяции поставлена (1), ее решение (2) записано, для погрешности есть форма представления (3).

#2.2 Формулы численного дифференцирования.

Для того, чтобы приближенно вычислить $f^{(s)}(x)$ можно взять интерполяционный полином $P_n(x)$, построенный на (x_i, f_i) $i=0, n$ и заменить $f^{(s)}(x^*)$ на $P_n^{(s)}(x^*)$.

Соотношение между n и s пока не обсуждаем.

Найдем форму записи $P_n^{(s)}(x^0)$:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_{in}(x) f_i \quad P_n^{(s)}(x) = \sum_{i=0}^n L_{in}^{(s)}(x) f_i$$

$$P_n^{(s)}(x) \Big|_{x=x^*} = \sum_{i=0}^n \left(L_{in}^{(s)}(x) \right) \Big|_{x=x^*} \cdot f_i = \sum_{i=0}^n c_i \cdot f_i, \quad c_i = L_{in}^{(s)}(x) \Big|_{x^*} - \text{числа, которые зависят только от узлов}$$

сетки, но не зависят от функции f .

Найдем погрешность этой формулы:

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) \quad f^{(s)}(x) = P_n^{(s)}(x) + r_n^{(s)}(x) \quad f^{(s)}(x^*) = P_n^{(s)}(x^*) + r_n^{(s)}(x^*)$$

Определение:

Погрешностью численного дифференцирования будем называть разность: $f^{(s)}(x^*) - P_n^{(s)}(x^*) = \Psi$

$$\Psi \equiv r_n^{(s)}(x^*) = \frac{1}{(n+1)} \frac{d^{(s)}}{dx^{(s)}} \left[f^{(n+1)}(\xi(x)) \omega(x) \right] \Big|_{x=x^*} \quad (5) \quad (\text{это не оценка, а сама погрешность})$$

Выводы:

- 1) получена функция дифференцирования (4) и правильную формулу погрешности (5) – которую нельзя применить на практике.
- 2) Обсудим точность формулы дифференцирования.

Утверждение:

$f(x)$ совпадает с $P_n(x)$, если f – сама является полиномом степени не выше n .

Рассмотрим численное дифференцирование.

если $f(x) \sim P_n(x)$, если $f^{(s)}(x) \sim P_n^{(s)}(x)$ – если функция является полиномом степени n и для построения формулы численного дифференцирования используется полином степени n , то формула (4) даст точный результат.

Пример: $x_0, x_1, x_2, x_3 \Rightarrow P_3(x)$

- 3) Можно находить производные до n -го порядка, остальные будут равны 0.
- 4) Пусть на сетке из $n+1$ узла построен полином $P_n(x)$ и получена формула для нахождения производных порядка s . Число 1 называется точностью этой формулы, если формула дает точные значения любой функции, являющейся полиномами степени не выше l , а среди функций, являющихся полиномами степени $l+1$ найдется такая, для которой результат численного дифференцирования будет иметь погрешность.

Лекция №6 (13.10.04) #2.3. Примеры формул численного дифференцирования.

$$f^{(s)}(x^*) \sim P_n^{(s)}(x)|_{x=x^*} \quad (1)$$

1) вид формулы: $\sum_{i=1}^n c_i f_i$, где c_i – зависит от сетки (2)

2) запись погрешности дифференцирования:

$$\Psi = f^{(s)}(x^*) - P_n^{(s)}(x)|_{x=x^*} \quad (3)$$

$$\Psi = \frac{d^{(s)}}{dx^s} \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega(x) \right) \quad (4)$$

пример: $f'(x_i)$ сетка x_i, x_{i+1} из 2 узлов $P_1(x_i)=f_i$, $P_2(x_{i+1})=f_{i+1}$

$$P_1(x) = \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} f_i + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1} \quad (5) \quad f'(x_i) \sim P'_1(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

Если шаг обозначается $h=x_{i+1}-x_i$, то $f'(x_i) \sim \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ (6) - оператор правой разностной производной.

- Общий вид формулы численного дифференцирования производной должен записываться в

$$\text{виде: } \sum_{i=1}^n c_i f_i \quad \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \sum_{j=0}^1 f_{i+j} c_j \Rightarrow c_0 = \frac{-1}{h}; c_1 = \frac{1}{h}$$

- геометрический смысл формулы (6)

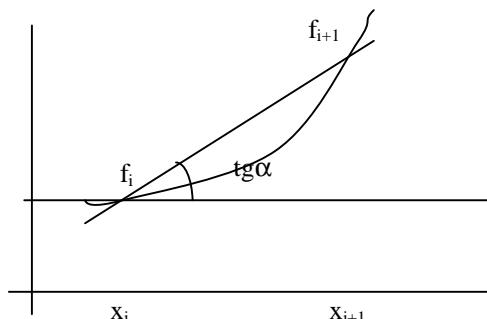
Функцию $f(x)$ заменим прямой, проходящей через пару точек $(x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1})$. Производная $f'(x_i)$ равна тангенсу угла наклона касательной к функции $f(x)$ в точке x_i .

Величину $f'(x_i)$ на $P'_n(x_i)$. Таким образом, тангенс угла наклона касательной мы заменим на тангенс угла наклона секущей.

- Производная называется правой, т.к. для вычисления f' в точке x_i используется x_i и узел правее x_{i+1} .

Пример 2. $f'(x_i)$ сетка: x_{i-1}, x_i строим полином $P_1(x_{i-1})=f_{i-1}$, $P_1(x_i)=f_i$

$$P_1(x) = \frac{(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} \cdot f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} f_i \quad (6) \quad f'(x_i) \sim P'_1(x)|_{x_i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \text{ пусть } h = x_i - x_{i-1}$$



Для вычисления производной можно использовать: $f'(x_i) \sim \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$ (8) - это оператор левой разностной производной.

Пример: $f'(x_i)$ сетка x_{i-1}, x_i, x_{i+1} – строим $P_2(x)$: $P_2(x_{i-1})=f_{i-1}$, $P_2(x_i)=f_i$, $P_2(x_{i+1})=f_{i+1}$

$P_2(x) =$

$$f'(x_i) \sim P'_2(x)|_{x_i} =$$

если сетка равномерная, т.е. $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h$, то $f'(x_i) \sim \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$ (10) - оператор центральной разностной производной.

$$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \sum_{j=-1}^1 c_j f_{i+j}, \text{ где } c_{-1} = \frac{-1}{2h}, c_0 = 0, c_1 = \frac{1}{2h}$$

Пример 4. $f''(x_i)$ сетка x_{i-1}, x_i, x_{i+1} , строим $P_2(x) \rightarrow P_2(x_{i-1})=f_{i-1}$, $P_2(x_i)=f_i$, $P_2(x_{i+1})=f_{i+1}$ $P_2(x)$ - уже выписан, см. (9) $f''(x_i) \sim P_2''(x)|_{x_i} =$

Если сетка равномерная, то $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h$

(11) $f''(x_i) \sim \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$ - оператор второй центральной разностной производной.

Практический пример:

x	1	3	5
f	6	5	9

$$f''(3) = \frac{9 - 2 \cdot 5 + 6}{2^2}$$

$f'(x_{i-1}) \sim P_2(x)|_{x=x_{i-1}}$, где $P_2(x)$ такой, что $P_2(x_{i+j}) = f_{i+j}$, $j = -1, 0, 1$

2-я Производная второй степени является константой \Rightarrow производную в точке x_{i-1} можно заменить на производную этого же полинома в точке x_i .

Общепринятые обозначения:

$$f_x = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad f_{\bar{x}} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad f_{\tilde{x}} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad f_{xx} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

Вычислительная погрешность численного дифференцирования.

На примере правой разностной производной. $f'(x_i)$ заменяем на оператор $f_x = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ величину $f'(x_i) - f_x$ называют погрешностью численного дифференцирования и обозначается Ψ .

Ψ нас сейчас не интересует! Нас интересует разница между $f_x = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ (12) и тем, что выдаст машина.

Будем считать, что вычислительная погрешность присутствует только при вычислении функции f . Вместо f_i машина даст $f_i = f_i + \delta_i$, а вместо $f_{i+1} - f_{i+1} + \delta_{i+1}$.

Будем считать, что h задано точно и $|\delta_i| < \delta$. Тогда машина выдаст:

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{h} \quad \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{h} - \text{это вычислительная погрешность численного дифференцирования.}$$

Для вычислительной погрешности справедлива оценка: $\left| \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{h} \right| \leq \frac{2\delta}{h}$ (13)

т.к. возможно, что $\delta_{i+1} = \delta$ и $\delta_i = -\delta$.

Вывод: формула (13) показывает, что численное дифференцирование численно неблагополучно. Чем меньше шаг сетки, тем сильнее оказывается вычислительная погрешность задания функции на вычислительной погрешности формулы дифференцирования.

Лекция №7(20.10.04).

Анализ погрешности численного дифференцирования с помощью рядов Тейлора.

$f^{(s)}(x) \quad x_0, \dots, x_n$ – сетка $P_n(x)$ такой, что: $P_n(x_i) = f_i, i=0, n$.

$$P_n^{(s)}(x) \Big|_{x=x^*} = \sum_{i=0}^n c_i f_i - \text{заменяем } f^{(s)}(x^*).$$

Погрешность численного дифференцирования: $\Psi = f^{(s)}(x^*) - \sum_{i=0}^n c_i f_i$

$$\Psi = \frac{d^s}{dx^s} \left[\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega(x) \right]_{x=x^*} - \text{эта формула бесполезна, т.к. мы не знаем зависимости } \xi(x).$$

Выясним, как изучают погрешность численного дифференцирования на примере правой

производной: $(f_x)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$, где $h = x_{i+1} - x_i$, погрешностью будем называть:

$$\Psi = f'(x_i) - (f_x)_i = f'(x_i) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} =$$

Далее будем раскладывать значение функции f , входящей в состав оператора в ряд Тейлора в той точке, в которой берется производная. Раскладываем f_{i+1} и f_i в точке x_i в ряд Тейлора.

$$(3) f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + \dots + f^{(n)}\frac{h^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ где } \xi \in [x, x+h] - cp. (.)$$

$$= f'(x_i) + \frac{f_i}{h} - \frac{1}{h} \left(f(x_i) + f'(x_i)h + f''(\xi)\frac{h^2}{2!} \right);$$

$$(4) \boxed{\Psi = f'(x_i) - (f_x)_i = -f''(\xi)\frac{h}{2}, \xi \in [x_i, x_{i+1}]}$$

- эта формула представления погрешности через среднюю точку, полученная с помощью ряда Тейлора.

Оценка погрешности дифференцирования.

$$(5) |f'(x_i) - (f_x)_i| \leq M \cdot h, \text{ где } M = \frac{1}{2} \max |f''(\xi)|, \text{ если функция } f \text{ достаточно гладкая, } \xi \in [x_i, x_{i+1}]$$

x_i – фиксированная и шаг $h < \delta, \delta > 0 \Rightarrow$ эта оценка справедлива.

Главный член погрешности дифференцирования и порядок погрешности.

вернемся к формуле (4) и разложим $f'(\xi)$ в точке x_i в ряд Тейлора:

$$f''(\xi) = f''(x_i) + f''(\xi) \cdot (\xi - x_i) = f''(x_i) + O(h) \quad \boxed{\Psi = -\frac{h}{2} f''(x_i) + O(h^2)} \quad (6) \quad -\frac{h}{2} f''(x_i) - \text{это}$$

главный член погрешности с 1 порядком.

Оператор правой разностной производной имеет погрешность дифференцирования порядка

1. Формулу (6) можно было бы получить сразу из выражения $\Psi = f'(x_i) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$, если бы мы

раскладывали величину f_{i+1} в точке x_i до $f''(\xi)$.

Погрешности дифференцирования для наиболее популярных операторов.

$$f'(x_i) \sim (f_x)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}, \Psi = -\frac{h}{2} f''(x_i) + O(h^2) \text{ 1 порядок}$$

$$f'(x_i) \sim (f_{\bar{x}})_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}, \Psi = \frac{h}{2} f''(x_i) + O(h^2) \text{ 1 порядок}$$

$$f'(x_i) \sim (f_x)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \Psi = \dots 2 \text{ порядок}$$

$$f''(x_i) \sim (f_{xx})_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}, \Psi = \dots 2 \text{ порядок}$$

Специфика оператора дифференцирования.

Одно и то же разностное выражение можно применять для приближенного вычисления производных в разных точках. Поскольку выражение одно и то же, приближенное значение производной в этих точках будет одинаковым, но погрешность численного дифференцирования реально окажется разной и будет иметь разные порядки.

$$f''(x_i) \rightarrow (f_{xx})_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}, \text{ погрешность дифференцирования } \Psi \text{ будет 2-го порядка.}$$

$$f''(x_{i-1}) \rightarrow (f_{xx})_{i-1} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}, \text{ погрешность дифференцирования } \Psi \text{ будет 1 порядка.}$$

(доказать, что порядки погрешности будут такие).

Анализ общей погрешности дифференцирования.

(см. Вержбицкий ЧМ).

Рассмотрим на примере правой производной:

$$(f_x)_i \sim (f_x)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \text{ хотим вычислить } (f_x)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \text{то, что выдаст машина.}$$

истинная производная

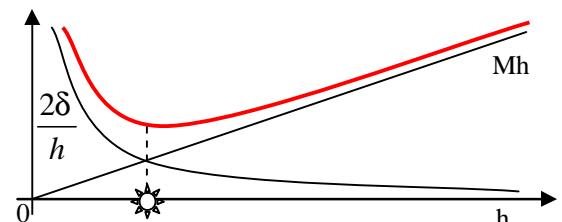
$$(f_x)_i \neq (f_x)_i, \text{ т.к. } |f_{i+1} - f_{i+1}| \leq \delta, |f_i - f_i| \leq \delta \text{ функция вычисляется с погрешностью } \delta.$$

$$\text{Исследуем разницу } |f'(x_i) - (f_x)_i| \leq \left| \frac{|f'(x_i) - (f_x)_i|}{\text{модуль пог.-ти } |\Psi| \text{ диф-ния}} \right| + \left| \frac{(f_x)_i - (f_x)_i}{\text{модуль выч. погрешности}} \right| \leq M h + \frac{2\delta}{h} \quad (7)$$

(B) из Л.7

Чем меньше шаг сетки h , тем меньше погрешность дифференцирования и тем больше вычислительная погрешность.

Оптимальный шаг численного дифференцирования зависит от константы M и для каждой функции свой.



#3 Решение стационарного уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами.

Первая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$(1) \begin{cases} \frac{d}{dx} \left(k(x) \cdot \frac{du}{dx} \right) - q(x)u(x) = -f(x) & q(x) \geq 0 \quad k(x) \geq c > 0 \\ u(0) = \mu_1 \quad u(1) = \mu_2 & x \in (0,1) \end{cases}$$

$u(x)$ – неизвестная функция (температура в точке x). Отрезок (стержень) единичной длины $k(x) \geq c > 0$ – коэффициент теплопроводности; $q(x) \geq 0$ – коэффициент теплообмена с окружающей средой через боковую поверхность $f(x)$ – плотность источников и стоков тепла на поверхности стержня (пример: по стержню идет ток или протекает химическая реакция), если $q(x)=0 \Rightarrow$ стержень теплоизолирован. Если $q(x)>0$ – идет теплообмен с окружающей средой.

Закон теплообмена Ньютона: $q(x) \cdot \left(u(x) - \theta(x) \right)$ – уходит с среду. Если $q(x) \neq 0 \Rightarrow f(x)$ содержит слагаемые вида $q(x), \theta(x)$, отвечающие за теплообмен с окружающей средой.

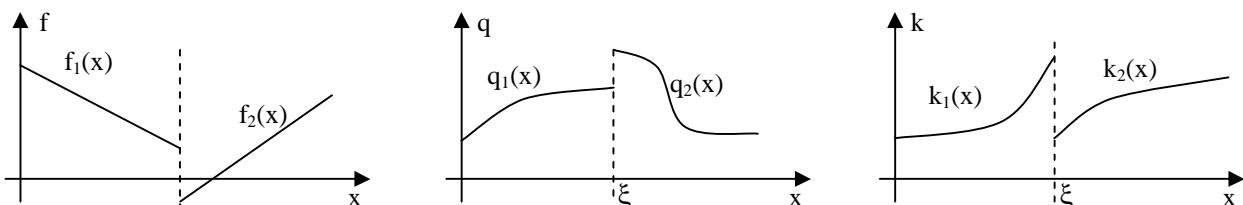
На концах стержня поддерживается постоянная температура μ_1 и μ_2 . Будем рассматривать задачу (1) с разрывными коэффициентами: $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$. Пусть есть только одна точка разрыва ξ . То есть стержень состоит из 2-х частей из разного.

Для отыскания решения задачи (1) с разрывными коэффициентами используют условия непрерывности температур и непрерывности теплового потока.

$$u^+ = \lim_{x \rightarrow \xi+0} u(x) \quad u^- = \lim_{x \rightarrow \xi-0} u(x) \quad \boxed{u^+ = u^-} \quad (2)$$

$$\omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} -k(x) \frac{du}{dx} \text{ — функция теплового потока. } \omega^+ = \lim_{x \rightarrow \xi+0} \omega(x) \quad \omega^- = \lim_{x \rightarrow \xi-0} \omega(x) \quad \boxed{\omega^+ = \omega^-} \quad (2^*)$$

Для того чтобы записать метод решения уравнения (1) введем обозначения:



Если функция k , q , f кусочно-непрерывны, то решения задачи (1) с условиями сопряжения (2), (2^{*}) существуют, единственно и является непрерывной функцией. С ростом гладкости данных коэффициентов растет гладкость $u(x)$ решения.

Если k , q и f дважды кусочно-непрерывно дифференцируемы, то решение задачи (1) с условиями (2), (2^{*}) существует, единственно и трижды непрерывно дифференцируемо. Для численного решения уравнения (1) можно взять равномерную сетку с дробными вспомогательными узлами.

Сетка: $x_0, \dots, x_n, h = \frac{1}{n}, x_i = ih, i = 0, n$ Вспомогательные узлы $x_{i+1/2} = \left(i + \frac{1}{2}\right)h$

Пусть u_i , $i=0, n$ – это точное решение задачи (1) в узлах сетки.

Пусть v_i – приближенное решение задачи (1) в узлах сетки.

$$(3) \begin{cases} \frac{v_{i+1} - v_i}{h^2} a_{i+1} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h^2} a_i - d_i v_i = -\Phi_i \\ v_0 = \mu_1, v_n = \mu_2, \text{ где} \end{cases} \quad (4) d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx, \text{ при } i = 1, n-1$$

$$(5) \Phi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx, \text{ при } i = 1, n-1$$

$$(6) a_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1}, i = 1, n$$

Система (3) решается методом прогонки, a_i , Φ_i , d_i – получены на основе условий задачи.

Лекция №8.

Дифференциальная задача на отыскание $u(x)$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u(x) = -f(x) \quad (1) \quad k(x) \geq c > 0 \quad q(x) \geq 0 \\ u(0) = \mu_1 \quad u(1) = \mu_2 \quad (2) \\ u^+ = u^- \quad \omega^+ = \omega^- \quad (2^*) \\ \text{где } \omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} -k(x) \frac{du}{dx} \end{cases}$$

Эту задачу можно решить численно: вводим основную сетку $x_i = ih$, $i=0, n$ $h=1/n$ ($x_0=0$, $x_n=1$) вспомогательная сетка $x_{i+1/2}=(i+1/2)h$, $i=1, n-1$; вектор $v=(v_0, v_1, \dots, v_n)$ будем рассматривать как численное решение дифференциальной задачи. Для его нахождения решаем разностную схему:

$$(3) \begin{cases} \frac{v_{i+1} - v_i}{h^2} a_{i+1} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h^2} a_i - d_i v_i = -\phi_i, & i = 1, n-1 \\ v_0 = \mu_1 \quad v_n = \mu_2, \text{ где} \end{cases}$$

$a_i, i = 1, n$; $d_i, i = 1, n-1$; $\phi_i, i = 1, n-1$ – считаются по формулам (4), (5), (6)

Разностная схема (3) является примером однородной консервативной схемой.

Определение:

Разностные схемы называются консервативными, если они обеспечивают выполнение физических законов сохранения.

Т.к. $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ являются функциями $\Rightarrow a_i, d_i$ и ϕ_i – разные.

Разностная схема называется однородной, если способ вычисления ее коэффициентов независим от наличия точек разрыва $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$.

Пример: $\begin{cases} u''(x) - u(x) = -5 \\ u(0) = 0 \quad u(1) = 100 \\ u(x), x \in [0, 1] \end{cases}$

$k(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 1$, $f(x) \equiv 5$

$$\begin{cases} \frac{v_{i+1} - v_i}{h^2} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h^2} - v_i = -5, & i = 1, n-1 \\ v_0 = 0 \quad v_n = 100 \end{cases} \quad d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} 1 dx = \frac{h}{h} = 1 \quad \phi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} 5 dx = \frac{5h}{h} \equiv 5$$

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{1} = \frac{h}{h} \Rightarrow a_i \equiv 1$$

#3: 3.1 Постановка дифференциальной задачи, ее корректность, метод приближенного решения.

Уровень 1 (Разработчика); Уровень 2 (Аналитик)

3.2. Корректность разностной схемы и метод ее решения.

3.3. Сходимость решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи.

3.4. Расчетные формулы разностной схемы в окрестности точки разрыва.

3.5. Расчетные формулы разностной схемы в случае, когда интеграл нельзя взять аналитически.

3.6. Тест и поведение общей погрешности.

Уровень 2.

3.7. Способ получения разностной схемы (схема (3) получена интегрально-интерполяционными методом).

3.9. **Погрешность аппроксимации или история о том, как исследуют сходство разностных схем и дифференциальных задач.**

3.10. Основы «теории разностных схем» и идеи доказательства сходимости.

Другие методы численного решения задачи (1),(2) уравнения теплопроводности.

Корректность разностной схемы и метод ее решения.

$$(7) \begin{cases} \frac{v_{i-1}}{h^2} a_i - v_i \left(\frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i \right) + \frac{v_{i+1}}{h^2} a_{i+1} = -\phi_i, & i = 1, n-1 \\ v_0 = \mu_1, \quad v_n = \mu_2, \text{ где } a_i, d_i, \phi_i \text{ из формул (4), (5), (6)} \end{cases}$$

Это линейная система уравнений относительно $v=(v_0, \dots, v_n) \in R^n$ с 3-х диагональной матрицей,

элементы на главной диагонали: $-\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i\right)$, $i = 1, n-1$ – 1, для $i = 0$ и n , правее главной

диагонали: $\frac{a_{i+1}}{h^2}$, левее главной диагонали: $\frac{a_i}{h^2}$.

Вопрос корректности можно решить на основе условий применимости прогонки.

Утверждение:

Пусть в дифференциальной задаче (1) $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – кусочно-непрерывные \Rightarrow для любой $f(x)$ разностная схема (7) имеет единственное решение и его можно найти прогонкой.

Доказательство: проверить условия диагонального преобладания в условиях применимости прогонки.

$$d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx \geq 0 \quad \frac{1}{a_i} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{f(x)} > 0 \quad k(x) \geq c > 0 \Rightarrow a_i > 0, i = 1, n$$

$$\left| \frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i \right| \geq \left| \frac{a_i}{h^2} \right| + \left| \frac{a_{i+1}}{h^2} \right| - \text{выполнены для уравнений } i = 1, n-1$$

а для уравнений $v_0 = \mu_1$, $v_n = \mu_2$ – выполнено условие строгого диагонального преобладания.

Сходимость.

Определение:

Пусть u_i – есть точное решение дифференциальной задачи (1) в узлах сетки, пусть v_i – есть точное решение разностной схемы (3) –(6) в узлах сетки.

Погрешностью решения дифференциальной задачи с помощью разностной схемы, называют вектор $z = (z_i)$: $z_i = u_i - v_i$, $i = 0, n$

На практике погрешность решения оценивают нормой вектора $\|z\|$, например $\|z\| = \max_{i=0,n} |z_i|$,

$$\|z\|_2 = \sqrt{(z, z)} \quad \|z\| = \sum_{i=0}^n |z_i|$$

Теорема:

Пусть $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы \Rightarrow Точное решение разностной схемы (3)-(6) сходится к точному решению дифференциальной задачи в следующем смысле:

$\exists h(\text{натур.}), \text{ что } \forall n > h \max_{i=0,n} |z_i| \leq Mh^2$ – второй порядок сходимости , где $h = 1/n$ – шаг

равномерной сетки, и M - не зависит от h , n – число разбиений сетки.

Теорема:

Если $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы, то решение разностной схемы (3)-(6) сходится к решению дифференциальной задачи (1), точно также:

$\exists h(\text{натур.}), \text{ что } \forall n > h \max_{i=0,n} |z_i| \leq Mh^2$ – второй порядок сходимости

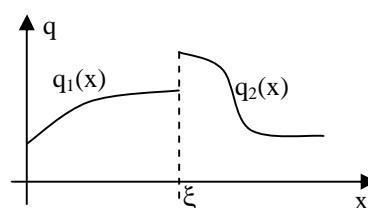
Эти оценки работают для достаточно густых сеток.

Расчетные формулы для a_i , d_i , ϕ_i в окрестности точки разрыва.

$$d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx, \quad i = 1, n-1$$

Пусть имеется ξ -(.) разрыва

- если $\xi \leq x_{i-1/2} \Rightarrow d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q_2(x) dx$
- если $\xi \geq x_{i+1/2} \Rightarrow d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q_1(x) dx$
- иначе $\xi \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \Rightarrow d_i = \frac{1}{h} \left(\int_{x_{i-1/2}}^{\xi} q_1(x) dx + \int_{\xi}^{x_{i+1/2}} q_2(x) dx \right)$



Утверждение: Разностная схема содержит

$$\phi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx, \quad i = 1, n-1$$

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}, \quad i=1,n \quad \text{если } \xi \leq x_{i-1} \Rightarrow \frac{1}{a_i} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k_2(x)}; \quad \text{если } \xi \geq x_i \Rightarrow \frac{1}{a_i} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k_1(x)}$$

$$\xi \in (x_{i-1}, x_i) \Rightarrow \frac{1}{a_i} = \frac{1}{h} \left(\int_{x_{i-1}}^{\xi} \frac{dx}{k_1(x)} + \int_{\xi}^{x_i} \frac{dx}{k_2(x)} \right)$$

Лекция №9 (3.11.04) Коэффициенты разностной схемы в случае, когда интеграл не берется аналитически.

Определение:

$$\begin{cases} a_{i+1} \frac{v_{i+1} - v_i}{h^2} - a_i \frac{v_i - v_{i-1}}{h^2} - d_i v_i = -\Phi_i, & i=1,n-1 \\ v_0 = \mu_1, v_n = \mu_2, \quad a_i, d_i, \Phi_i \quad \text{по формулам (4)-(6)} \end{cases}$$

$$\Phi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx, \quad d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx, \quad (a_i)^{-1} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$$

Пусть интегралы не берутся аналитически \Rightarrow их можно посчитать по формулам трапеций или средних прямоугольников, без ущерба для порядка сходимости разностной схемы.

Утверждение:

Пусть в разностной схеме (3)-(6), вместо коэффициентов a_i, d_i, Φ_i используются коэффициенты a_i, d_i, Φ_i , вычисленные со вторым порядком точности, то есть:

$$|a_i - a_i| \leq M_1 h^2, \quad i=1,n \quad |d_i - d_i| \leq M_2 h^2, \quad i=1,n-1 \quad |\Phi_i - \Phi_i| \leq M_3 h^2, \quad i=1,n-1 \quad (\sim)$$

где M_1, M_2, M_3 – не зависят от h , т.е. $\exists \delta > 0, \delta \in N$, что $\forall n > \delta$ выполнено (\sim) .

Тогда разностная схема с коэффициентами a_i, d_i, Φ_i сходится к решению дифференциальной задачи (1) со 2 порядком.

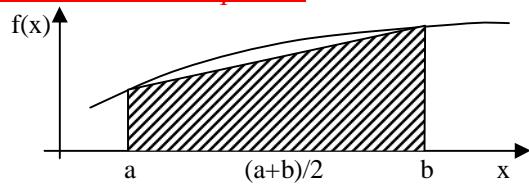
Доказательство см. в Самарском.

Мы будем использовать формулы трапеций и средних прямоугольников, т.к. они удовлетворяют этим оценкам.

Расчетные формулы для вычисления интегралов.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a)$$

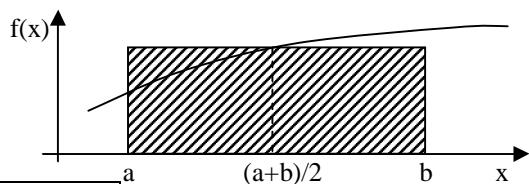
формула трапеций



$$\int_a^b f(x) dx \sim f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

формула средних прямоугольников.

Таблица расчетных формул.



	трапеции		сред. прямоугольники	
	нет точки разрыва	есть точка разрыва	нет точки разрыва	есть точка разрыва
a_i $i=1,n$	$\frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}}$		$k_{i-1/2}$	
d_i $i=1,n-1$	$\frac{q_{i+1/2} + q_{i-1/2}}{2}$		q_i	
Φ_i $i=1,n-1$	$\frac{f_{i+1/2} + f_{i-1/2}}{2}$		f_i	

Формула трапеции, на $[x_{i-1}, x_i]$ разрывы отсутствуют:

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \sim \frac{\frac{1}{k(x_i)} + \frac{1}{k(x_{i-1})}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) = \left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i-1}} \right) \frac{h}{2}$$

$$a_i \sim \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i-1}} \right) \right)^{-1} = \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}}$$

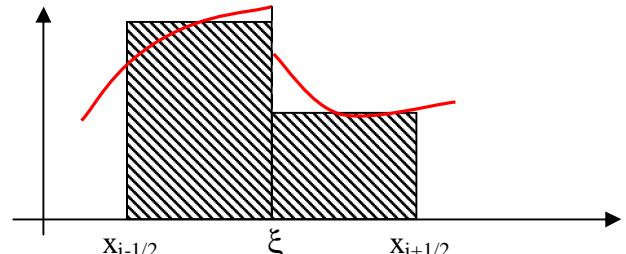
Формула средних прямоугольников $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ – нет точек разрыва.

$$d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx \sim \frac{1}{h} q(x_i) (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) = q(x_i)$$

Если есть точка разрыва, то необходимо использовать формулу приближенного интегрирования на участках, где функция непрерывна.

Тест и поведение погрешности.

Решаем задачу с помощью разностной схемы (3)-(6), либо с помощью (3), (8).



Решение (1) нельзя построить аналитически, и численный метод нужен, чтобы его найти.

Пусть решение (1) можно найти построить аналитически \Rightarrow численно можно построить решение, а потом их сравнить.

Тест состоит в том, что максимум разности $\max_{i=0,n} |u_i - v_i| \leq Mh^2$ – должно выполняться.

Теоретически при $h \rightarrow 0$ этот максимум стремиться к нулю, на практических, начиная с некоторого малого шага сходимость прекратиться (10000 узлов, например).

2-й тест («хитрый тест»), в котором точное решение дифференциальной задачи (1) и разностной схемы (3) абсолютно совпадают (теоретически), т.е. $\forall h \max_{i=0,n} |u_i - v_i| = 0$.

Решение разностной схемы (3), полученное на компьютере, обозначим $\hat{v}(v_0, v_1, \dots, v_n)$. Тогда разница $\max_{i=0,n} |u_i - v_i|$ покажет эффект вычислительной погрешности.

$$\text{Пусть } u(x) = x(x-1) \quad u(0) = 0; \quad u(1) = 0; \quad u'' - u = 2 - x(x-1) = -(x^2 - x - 2) \quad (11)$$

Разностная схема:

$$(12) \begin{cases} \frac{v_{i+1} - v_i}{h^2} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h^2} - v_i = -(x_i^2 - x_i - 2) \\ v_0 = 0 \quad v_n = 0 \end{cases}$$

точное решение задачи (11) и разностной схемы (12) совпадают.

2-ю тестовую задачу можно строить с различными модификациями и смотреть, как влияет перепад коэффициентов в задаче на накопление вычислительной погрешности. Обычно чем контрастнее исходные данные, тем сильнее начинает сказываться вычислительная погрешность.

$u(x)$ – точное решение задачи (1) – неизвестно, берем n , считаем v_i , $i=0,n$. Берем $2n$, считаем v_{2i} , $i=0,2n$ и сравниваем v и v_{2i} в общих узлах. Если $\max_{i=0,n} |v_i - v_{2i}|$ – достаточно мало, то считаем, что (1) решена с нужной точностью.

Практическая основа этого правила: если сетка становится гуще и гуще, а оценка разности не меняется, то нет необходимости делать ее гуще. $u(x)$ – точное решение задачи (1), $v(x)$ – точное решение разностной схемы при количестве узлов n , $v_{2i}(x)$ – точное решение разностной схемы при количестве узлов $2n$.

$$\max_{i=0,n} |v_i - v_{2i}| \leq \max_{i=0,n} |v_i - u_i| + \max_{i=0,n} |u_i - v_{2i}| \leq Mh^2 + M\left(\frac{h}{2}\right)^2 = Mh^2, \text{ m.e. } \max_{i=0,n} |v_i - v_{2i}| \leq Mh^2$$

т.к. разностная схема сходиться к решению задачи (1), то разность этих решений должна стремиться к 0 со вторым порядком. Это критерий остановки счета.

3-й Тест для программы:

при решении основной задачи величина $\max_{i=0,n} |v_i - v_{2,i}|$ должна убывать со вторым порядком.

Примечание: Как считать сетки?

1) $x_i = ih$, $i=0,n$; $x_0=0$, $x_n=1$ или

2) $x_i = x_{i-1} + h \Rightarrow$ может получиться $x_n \neq 1$, за счет вычислительной погрешности.

Лекция №10 (10.11.04).

Подготовка к лабораторной работе.

Дифференциальная задача → Разностная задача

1) Схема не считается ($10^{30}, 10^{200}$)

2) Разностная схема сходится, но не к решению дифференциальной задачи (ДЗ) (разностная схема не имеет физического смысла).

3) Разностная схема сходится к решению ДЗ, но медленно.

1. \Rightarrow нет вычислительной устойчивости. 2. \Rightarrow схема не соответствует физическим законам.

3. \Rightarrow нужно улучшить схему.

Сначала строят разностную схему, а потом смотрят на наличие проблем.

Построение разностной схемы интегрально-интерполяционным методом.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) u(x) = -f(x) & k(x) \geq c > 0 \\ u(0) = \mu_1 \quad u(1) = \mu_2 & q(x) \geq 0 \\ u(x), x \in [0,1] & u^+ = u^- \\ & \omega^+ = \omega^- \end{cases} \text{ - непрерывность функции и теплового потока}$$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \sim f\left(\frac{b+a}{2}\right) \int_a^b g(x) dx, \text{ причем выполняется оценка:}$$

Свойство: $\left| \int_a^b f(x) g(x) dx - f\left(\frac{b+a}{2}\right) \int_a^b g(x) dx \right| \leq M(b-a)^2$, где $M = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \cdot C$

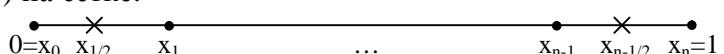
$$\left| \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) g(x) dx - f(x_i) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g(x) dx \right| \leq M \cdot (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})^2 = Mh^2$$

интеграл заменяют на \uparrow с погрешностью \uparrow .

Построим разностную схему для задачи (1) на сетке:

$x_0=0$, $x_n=1$, $x_i=ih$, $h=1/n$, $i=0,n$

$x_{i+1/2}=(i+1/2)h$, $i=0,n-1$.



...

Будем рассматривать процесс теплообмена на вспомогательных участках сетки $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ $i=1,n-1$.

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) \right) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) q(x) dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx = 0 \quad (13)$$

I II III

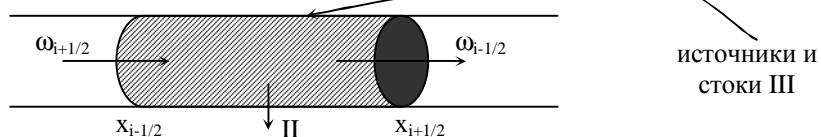
- это уравнение баланса тепла на отрезке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$

$$-\omega_{i+1/2} + \omega_{i-1/2} - u_i \int_{x_{i-12}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx + \int_{x_{i-12}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx = 0 \quad (14)$$

- это ур-е, приближенное с погрешностью Mh^2 .

$$\begin{cases} \frac{-\omega_{i+1/2} + \omega_{i-1/2}}{h} - u_i d_i + \phi_i = 0, & i = 1, n-1 \\ \text{где } d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx, \quad \phi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx \end{cases}$$

(15) - система приближенных уравнений, в которой

уравнений $n-1$, а неизвестных $u_i, i=0,n$ и $\omega_{i+1/2}, i=1,n-1$ 

источники и стоки III

Избавимся от ω в уравнении (15): $\omega(x) = -k(x) \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{\omega(x)}{k(x)}$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{du}{dx} \right) dx = u_i - u_{i-1}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(-\frac{\omega(x)}{k(x)} \right) dx \stackrel{c\theta-\theta_0}{\approx} -\omega_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$$

$$\omega_{i-1/2} = -\frac{u_i - u_{i-1}}{\left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right) h}$$

$$(a_i)^{-1} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \Rightarrow \boxed{\omega_{i-1/2} = -\frac{u_i - u_{i-1}}{h} a_i} \quad (16)$$

эта формула выражает тепловой поток через температуру без использования дифференцирования.
Подставим формулу (16) в уравнение (15):

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{h^2} a_{i+1} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h^2} a_i - d_i u_i + \phi_i = 0, & i = 1, n-1 \\ u_0 = \mu_1, \quad u_n = \mu_2 \end{cases} \quad (17)$$

В ЧМ полезно обозначать ДУ и РС разными буквами, поэтому систему уравнений (17) перепишем

$$\begin{cases} a_{i+1} \frac{v_{i+1} - v_i}{h^2} - a_i \frac{v_i - v_{i-1}}{h^2} - d_i v_i = -\phi_i, & i = 1, n-1 \\ v_0 = \mu_1, \quad v_n = \mu_2, \quad a_i, d_i, \phi_i \text{ по формулам (4)-(6)} \end{cases}$$

$$\phi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx, \quad d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx, \quad (a_i)^{-1} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$$

Это однородная консервативная схема. Разностная схема (3)-(6) является консервативной в некотором асимптотическом смысле:

1. обеспечивает закон сохранения тепла на $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ с погрешностью Mh^2
2. закон сохранения тепла обеспечен на участках $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $i=1, n-1$, т.е. в целом на участках $[x_{1/2}, x_{n-1/2}]$, а при $h \rightarrow 0$ $[x_{1/2}, x_{n-1/2}] \rightarrow [0, 1]$

(схемы, которые являются точными аналогами физических законов, не бывает!)

Пример неконсервативной разностной схемы для уравнения (1):

 $(k(x)u'(x))' = k'(x)u'(x) + k(x)u''(x)$ - заменяется на разностный аналог (в узле x_i)

$$\frac{k_{i+1} - k_i}{h} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + k_i \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad (19) \quad \text{Подставляем в уравнение (1) в (.) } x_i:$$

$$(20) \begin{cases} (19) - q_i u_i = -f_i, & i = 1, n-1 \\ u_0 = \mu_1, \quad u_n = \mu_2 \end{cases} \quad \text{- это разностная схема для уравнения (1), но не всегда}$$

консервативная. Если в задаче (1) k, q и f - достаточно гладкие, то схема консервативная в некотором приближенном смысле с погрешностями h^2 или h^3 . Если есть разрыв \Rightarrow схема неконсервативная.

Погрешность аппроксимации разностных схем.

Рассмотрим задачу: $\begin{cases} u'' - u = 5, & x \in [0,1] \\ u(0) = 5 & u(1) = 100 \end{cases} \quad (1^*)$ построим для нее разностную схему.

$x_i = ih, i=0,n, h=1/n$.

$$\begin{cases} \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} - v_i = 5, & i = 1, n-1 \\ v_0 = 0 & v_n = 100 \end{cases}$$

Погрешность $z = (z_0, \dots, z_n)$: $z_i = u_i - v_i, i=0,n$.

Погрешность аппроксимации: $\Psi = (\Psi_0, \dots, \Psi_n)$ – это невязка разностной схемы на решении ДУ.

Пример: $ax=b$ $r=ax-b$ (x-не обязательно решение)

Невязка уравнения $5x=3$ на решении уравнения $7x=9$

- 1) $r=5x-3=5 \cdot 9/7-3=24/7$
- 2) $r=5x-3=5x-3+(7x-9)=12x-12=24/7$
- 3) $r=5x-3=5x-3-100*(7x-9)=24/7$

Для задачи (1*) и разностной схемы (3*)-(6*) получим невязку:

$$\Psi_0 = v_0 - 0 = u_0 - 0 = 0 \quad | \text{Разностная схема аппроксимирует}$$

$$\Psi_n = v_n - 100 = u_n - 100 \quad | \text{граничные условия точно}$$

$$\begin{aligned} \Psi_i = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} - v_i - 5 &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - u_i - 5 = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - u_i - 5 - \left(u''(x_i) - u''(x_i) - 5 \right) = \\ &= \left(u_{xx} \right)_i - u''(x_i) = \frac{u^{IV}(\xi)}{12} h^2, \quad i = 1, n-1 \end{aligned}$$

Если точное решение ДУ неизвестно, для Ψ известна скорость убывания к 0.

Говорят, что разностная схема (3*) аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком k , если $\exists h \in N, \text{ что } \forall n > h : \max_{i=0,n} |\Psi_i| \leq Mh^k$, k – порядок аппроксимации.

Границные условия аппроксимируются точно, а в целом порядок аппроксимации будет

определяется $\frac{u^{IV}(\xi)}{12} h^2$, то есть 2.

Чем выше порядок аппроксимации, тем лучше. Чтобы повысить порядок аппроксимации разностной схемы есть 2 приема:

- 1) использовать более точную формулу дифференцирования;
- 2) использовать в разностной схеме вместо f_i и v_i величины с поправками более высокого порядка.

Лекция №11.

Основы теории разностных схем и принцип доказательства сходимости (на примере простой задачи).

$$(1^*) \begin{cases} u''(x) - u(x) = -f(x) \\ u(0) = \mu_1 & u(1) = \mu_2 \end{cases} \quad u(x) = ?, \quad x \in [0,1] \quad \text{сетка: } x_i = ih, \quad i = 0, n \quad h = \frac{1}{n}$$

$$(3^*) \begin{cases} \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} - v_i = -f_i, & i = 1, n-1 \\ v_0 = \mu_1 & v_n = \mu_2 \end{cases} \quad u(x) - \text{решение}(1^*) \quad v = (v_0, \dots, v_n) - \text{точное решение}(3^*)$$

Для пары задач (1*) и (3*) две погрешности: z - погрешность Ψ - погрешность аппроксимации $z = (z_0, \dots, z_n)$, $z_i = u_i - v_i, i=0,n$ $\Psi = (\Psi_0, \dots, \Psi_n)$ z -неизвестно

Ψ - находится через ряд Тейлора (10.11) и можно определить порядок убывания к 0 при $h \rightarrow 0$.

$$\underline{\text{Связь } z \text{ и } \Psi:} \quad \Psi_0 = u_0 - \mu_1 = u_0 - v_0 = z_0 \quad \Psi_n = u_n - \mu_2 = u_n - v_n = z_n$$

$$\psi_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - u_i + f_i = \frac{u_{i+1} - v_{i+1} - 2(u_i - v_i) + (u_{i-1} - v_{i-1})}{h^2} - (u_i - v_i);$$

$$(4^*) \begin{cases} z_0 = \psi_0, z_n = \psi_n, \\ \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} - z_i = \psi_i, \end{cases} i = 1, n-1$$

таким образом z – является решением линейной системы уравнений (4^*) , матрица которой совпадает с матрицей разностной схемы (3^*) , а правая часть равна ψ .

Это свойство справедливо для любой линейной дифференциальной задачи, разностную схему которой можно представить, как линейную систему уравнений.

Доказательство сходимости.

Предположим, что для разностной схемы (4^*) можно построить оценку погрешности:

$$(I) \max_{i=0,n} |z_i| \leq K \cdot \max |\psi_i|, \text{ где } K \text{ – не зависит от сетки (т.е. от } h\text{)}$$

$$(II) \max_{i=0,n} |\psi_i| \leq M \cdot h^k, \text{ } M \text{ – не зависит от } h, \text{ подставим (II) в (I):}$$

$$(III) \max_{i=0,n} |z_i| \leq KMh^k, \text{ где } MK \text{ – не зависит от сетки.}$$

Из (III) следует сходимость решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи с порядком k . $\max_{i=0,n} |u_i - v_i| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0$ (*равномерная сходимость*)

Рассмотрим произвольную линейную дифференциальную задачу и произвольную разностную схему для ее решения представляющую собой линейную систему уравнений.

Определение 1:

Если для разностной схемы выполняется оценка (I) , говорят, что разностная схема устойчива.

Определение 2:

Если для дифференциальной задачи и ее разностной схемы выполняется (II) , говорят, что разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком k .

Утверждение:

Пусть решение дифференциальной задачи существует и единствено и на любой сетке решение разностной схемы существует и единствено. Если разностная схема аппроксимирует задачу с порядком k и разностная схема устойчива, то решение разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи с тем же порядком. (Доказательство очевидно)

1) Важно, чтобы в оценках (I) и (II) константы M и K не зависели от сетки.

$$2) \max_{i=0,n} |z_i| \stackrel{\text{def}}{=} \|z\|_\infty - \text{определ.} \quad \max_{i=0,n} |\psi_i| \stackrel{\text{def}}{=} \|\psi\|_\infty$$

при доказательстве сходимости в оценках (I) и (II) вместо данных норм можно использовать любые другие нормы векторов z и ψ , причем не обязательно одинаковые.

$$\|z\|_1 = \sum_{i=0}^n |z_i| \quad \|\psi\|_2 = \sqrt{(\psi, \psi)}$$

Докажем, что решение разностной схемы (3^*) сходится к решению задачи (1^*) .

$(I) \max_{i=0,n} |z_i| \leq K \cdot \max |\psi_i|$ - докажем дальше, $(II) \max_{i=0,n} |\psi_i| \leq M \cdot h^k$, M – не зависит от h , (II) было

доказано раньше, где $M = \max_{\xi \in [0,1]} |u''(\xi)| \cdot \frac{1}{12}$. Подставим (II) в $(I) \Rightarrow \max_{i=0,n} |z_i| \leq Mk \cdot h^2$.

Таким образом, мы доказали, что решение разностной схемы (3^*) сходится к решению задачи (1^*) со 2 порядком.

Докажем формулу (I) : $\max_{i=0,n} |z_i| \leq K \cdot \max_{i=0,n} |\psi_i|$.

Доказательство устойчивости схемы (3^*) . Перепишем систему (4^*) :

$$(4^{**}) \begin{cases} z_0 = \psi_0 = 0 & z_n = \psi_n = 0 \\ \frac{1}{h^2} z_{i-1} - \left(\frac{2}{h^2} + 1 \right) z_i + \left(\frac{1}{h^2} \right) z_{i+1} = \psi_i \end{cases}$$

Изменим обозначения, на те, которые использовались при решении 3-х диагональных систем методом прогонки: $\mu_1 = \mu_2 = 0$; $\chi_1 = \chi_2 = 0$; $A_i = \frac{1}{h^2}$; $B_i = \frac{2}{h^2} + 1$; $C_i = \frac{1}{h^2}$; $\Phi_i = -\psi_i$

Мысленно решим систему (4**) и оценим z через ψ .

Прогонка:

1. прямой ход: $\alpha_1 = \chi_1 = 0$ $\beta_1 = \mu_1 = 0$

$$i=1, n-1: \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}; \beta_{i+1} = \frac{\Phi_i + \beta_i A_i}{C_i - \alpha_i A_i} \quad (5)$$

$$2. \text{ обратный ход: } z_n = \frac{-\chi_2 \beta_n - \mu_2}{\chi_2 \alpha_n - 1} = 0 \quad z_i = \alpha_{i+1} z_{i+1} + \beta_{i+1}, i=n-1, 0 \quad (6)$$

Применимость прогонки:

$$A_i = \frac{1}{h^2} \geq 0; B_i = \frac{1}{h^2} \geq 0; C_i = \frac{2}{h^2} + 1 > A_i + B_i > 0; |\chi_1| < 1; |\chi_2| < 1 - \text{условия теоремы о}$$

применимости прогонки выполнены.

\Rightarrow выполнены условия $|\alpha_i| \leq 1$, $i=1, n$

Оценим z через β_i :

$$|z_n| = 0; |z_i| \leq |\alpha_{i+1}| \cdot |z_{i+1}| + |\beta_{i+1}| \leq |z_{i+1}| + |\beta_{i+1}| \leq \underbrace{|z_{i+1}|}_{*} + \underbrace{|\beta_{i+1}|}_{*} + |\beta_{i+1}| \leq \dots \leq |z_n| + |\beta_n| + |\beta_{n-1}| + \dots + |\beta_{i+1}|$$

$$\boxed{\max_{i=0,n} |z_i| \leq \sum_{j=1}^n |\beta_j| \leq n \cdot \max_{i=1,n} |\beta_j|} \quad (7) \quad \text{Оценим } \beta \text{ через } \psi, \text{ используем для этого формулу (5):}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\Phi_i + A_i \beta_i}{C_i - \alpha_i A_i} = \frac{-\psi_i + \frac{1}{h^2} \beta_i}{\left(\frac{2}{h^2} + 1 \right) - \alpha_i \frac{1}{h^2}} = \frac{-\psi_i h^2}{1 + (1 - \alpha_i) + h^2} + \frac{\beta_i \frac{1}{h^2} \cdot h^2}{1 + (1 - \alpha_i) + h^2} - \begin{cases} \text{выбросили 2 слагаемых} \\ \text{в знаменателе} \end{cases}$$

$$|\beta_{i+1}| \leq |\psi_i| h^2 + |\beta_i| \leq |\psi_i| h^2 + |\psi_{i-1}| h^2 + |\beta_{i-1}| \leq \dots \leq |\beta_1| + h^2 \sum_{j=1}^i |\psi_j|$$

$$\text{Таким образом: } |\beta_{i+1}| \leq h^2 \sum_{j=1}^i |\psi_j| \quad (8); \quad \max_{j=1,n} |\beta_j| \leq h^2 \sum_{l=1}^{n-1} |\psi_l| \quad (9)$$

Используя оценки (7) и (9):

$$\max_{i=0,n} |z_i| \leq n \cdot \max_{j=1,n} |\beta_j| \leq nh^2 \sum_{l=1}^{n-1} |\psi_l| \leq h(n-1) \max_{l=1,n-1} |\psi_l| \leq \max_{l=1,n-1} |\psi_l|$$

Итог: $\max_{i=0,n} |z_i| \leq \max_{l=1,n-1} |\psi_l|$. Оценка вида (I) доказана, $K=1$. Устойчивость разностной схемы доказана.

Утверждение:

Решение разностной схемы (3*) сходится к решению дифференциальной задачи (1*) с оценкой:

$$\max_{i=0,n} |u_i - v_i| \leq \frac{h^2}{12} \max_{\xi \in [0,1]} |u''(\xi)| \quad (10)$$

Точно также можно было доказать, что решение разностной схемы (3) сходиться к решению задачи (1).

Другие подходы к построению разностных схем.

- метод Ритца (1900-е)
- метод Бубнова-Галеркина (1930-е)
- метод конечных элементов (1960-е) все во II семестре.

Лекция №12.

#5. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона на основе разностной схемы 2-го порядка аппроксимации с помощью итерационных методов линейной алгебры.

План:

1. Введение в итерационные методы линейной алгебры (ЧМ ЛА).
2. Примеры численных методов (Якоби, Зейдель, Верхняя релаксация).
3. Структура лабы №3.
4. Разностная схема для решения задачи Дирихле, анализ погрешности аппроксимации ψ .
5. Обоснование применения ЧМ при решении разностной схемы (на примере метода верхней релаксации).
6. Анализ обусловленности линейных систем. Число обусловленности, его оценка через спектр матрицы, влияние на сходимость численного метода.
7. Специфика решения задачи Дирихле на густых сетках.
8. Другие варианты задач Дирихле:
 - a. задача Дирихле в криволинейной области;
 - b. задача Дирихле в трехмерной области;
 - c. нелинейная задача Дирихле.

#6: Доказательство сходимости к решению разностной схемы задачи Дирихле.

Введение в численные методы Линейной Алгебры.

(1) $Ax = b$, $x \in R^n$, $\det A \neq 0$, x^* – решение

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & \backslash & a_{1n} \\ \wedge & \wedge & \wedge \\ a_{m1} &] & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Определение:

Пусть вычислительная погрешность отсутствует, методы решения задачи (1), гарантирующие, что через конечное число арифметических действий будет найдено точное решение x^* называются прямыми (метод Гаусса, метод прогонки).

Определение:

Итерационные методы: задают вектор $X^{(0)}$ и по нему строят последовательность $\{X^{(s)}\}$, $s=1,2,\dots$ так, что каждый из элементов последовательности можно рассматривать как приближенное решение задачи (1).

Гарантии, что какой-либо x^s совпадает с x^* нет.

Определение:

Итерационный метод называется сходящимся, если для любого начального приближения $x^{(0)}$ последовательность $x^{(s)}$ сходится к точному решению x^* : $\lim_{s \rightarrow \infty} \|x^{(s)} - x^*\| = 0$.

В качестве нормы обычно используют одну из 3-х:

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1,n} |x_i| \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

В конечном пространстве все способы задания нормы эквивалентны \Rightarrow при доказательстве сходимости метода можно использовать любую норму, если сходимость в некоторой норме доказана, то она будет иметь место и в любой другой норме.

$x^{(0)}$ – задаем сами, $x^{(s)}$ $s=1,2,\dots$ – по правилу; $\epsilon_s^{\text{def}} = \|x^{(s)} - x^{(s-1)}\|$ – достигнутая точность метода на шаге s . Для остановки используем критерий по точности и критерий по числу итераций $-N_{\max}$.

- если $\|x^{(s)} - x^{(s-1)}\| \leq \varepsilon_1$, то метод прекращает работу и выводит сообщение: «Задача решена с точностью $\varepsilon_2 = \|x^{(s)} - x^{(s-1)}\|$, условие остановки по точности выполнено за s итераций».
- Если условие (2) не выполнено, но уже выполнено N_{max} итераций \Rightarrow метод должен остановиться, вывести сообщение: «Задача решена с точностью $\varepsilon_2 = \|x^{(s)} - x^{(s-1)}\|$. Выход по числу итераций».

В любом случае $x^{(s)}$ является приближенным решением задачи.

$\|x^{(s)} - x^*\|$ мы не знаем \rightarrow для практического контроля используем невязку.

$r^* = Ax^* - b$ – невязка на решении задачи, $r^{(s)} = Ax^{(s)} - b$ – невязка на решении $x^{(s)}$ можно вычислить.

Если $\|r^{(s)}\| \approx 0$ – хорошо, если $\|r^{(s)}\|$ великовато, то нужно посоветоваться с заказчиком.

Условие применимости метода: $Ax=b$, $x \in R^n$, $\det A \neq 0$ (1). Обычно требуется и накладываются дополнительные условия на матрицу A :

- условие диагонального преобладания: если $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$, $\forall i = 1, n$
- матрица симметрична: $A = A^T$
- матрица положительно определена: если $\forall h \in R^n$, $h \neq 0$ $(Ah, h) > 0$ (3)

Обычно используют критерии положительной определенности:

- критерий через главные миноры,
- критерий по т. Гермгерина (?) через собственные числа матрицы A .

Если система (1) не является симметричной и положительно определенной, то строим:

$$\underset{A}{A^T} \underset{A}{Ax} = \underset{A}{A^T} \underset{b}{b} \rightarrow Ax = \underset{b}{b} : A = \underset{A}{A^T} u \quad A > 0 \text{ - это прием нормализации.}$$

Свойства полученной матрицы, к сожалению, как правило хуже матрицы A , поэтому нормализацию используют не часто.

Примеры численных методов ЛА.

Теорема:

метод Якоби сходится к решению задачи (1) из любого начального приближения, если A удовлетворяет условию строгого диагонального преобладания.

Теорема:

метод Зейделя сходится к решению задачи (1) из любого начального приближения, если матрица A – симметричная и положительно определенная, $A = A^T$, $A > 0$.

Теорема:

метод верхней релаксации сходится к решению задачи (1) из любого начального приближения, если $A = A^T$ и $A > 0$ и $\omega \in (0, 2)$.

Формулы методов:

$$A = \begin{pmatrix} & & R \\ & D & \\ L & & \end{pmatrix}$$

$$A = L + D + R$$

L , D , R – матрицы размерности, как и у A .

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Метода Якоби:

$$Dx^{(s+1)} = -(Lx^{(s)} + Rx^{(s)} - b) \quad (5)$$

Метод Зейделя:

$$(L + D)x^{(s+1)} = -Rx^{(s)} + b \quad (6)$$

Метод верхней релаксации: $(D + \omega L)(x^{(s+1)} - x^{(s)}) / \omega + Ax^{(s)} = b \quad (7)$

Эти формулы позволяют рассчитать следующие приближения.

Лабораторная работа №3

Задача Дирихле $u(x, y) = ?$ $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$

сетка: $x_i = ih + a, i = 0, n, h = \frac{b-a}{n}; x_0 = a; x_n = b; y_j = jk + c, j = 0, m; k = \frac{d-c}{m}, y_0 = c; y_m = d$

$u_{ij}, i = 0, n; j = 0, m$ - точное решение задачи Дирихле в узлах сетки

$v_{ij}, i = 0, n; j = 0, m$ - приближенное решение задачи Дирихле в узлах сетки.

При этом v_{ij} - точное решение разностной схемы, которая является линейной системой уравнений. Для отыскания v надо решить линейную систему уравнений, для этого будем использовать итерационный метод \Rightarrow вместо $v = \{v_{ij}\}$ найдем $v^{(s)} = \{v_{ij}^{(s)}\}$.

Если $v_{ij}^{(s)}$ с помощью ПК найдена, нужно вычислить $\|v^{(s)} - u\| = ?$ и $\|v^{(s)} - v\| = ?$

Лекция №13.

(n,m) – размерность сетки; (x_i, y_j) – узел сетки; (i,j) – краткое обозначение для узла сетки.

Сеточная функция – это функция, заданная на сетке: $u(x, y) = \{u_{ij}\}, i = 0, n; j = 0, m$, через u_{ij} обозначим точное решение задачи Дирихле в узлах сетки.

Для решения задачи (1) строим разностную схему: $v(x, y) = \{v_{ij}\}, i = 0, n; j = 0, m$ - точное решение разностной схемы. Есть теорема о сходимости решения разностной схемы к решению дифференциального уравнения со 2-м порядком.

Теорема:

Если точное решение задачи Дирихле $u(x, y)$ является достаточно гладкой, то :

$$\max_{\substack{i=0, n \\ j=0, m}} |u_{ij} - v_{ij}| \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} M (h^2 + k^2) \quad \begin{cases} l_1 = b - a \\ l_2 = d - c \end{cases}; \quad M = \frac{1}{12} \max_{\substack{x \in [a, b] \\ y \in [c, d]}} (|u_{xxxx}(x, y)|, |u_{yyyy}(x, y)|).$$

отсюда следует $\lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \max_{i, j} |u_{ij} - v_{ij}| = 0$

Решение разностной схемы.

Разностная схема является системой линейных уравнений относительно v_{ij} . Если сетка имеет размерность (n,m) , то матрица имеет размерность $((n-1)(m-1)) \times ((n-1)(m-1))$. Матрица является сильно разреженной, и это позволяет решать линейные системы достаточно большой размерности.

Для матрицы $n \times n$ метод Гаусса выполняет n^3 арифметических действий. Поэтому метод Гаусса не применим к решению матриц большой размерности.

Теорема:

Матрица разностной схемы симметрична и положительно определена.

Следствие:

Систему разностной схемы можно решать методом Зейделя и методом верхней релаксации.

Реализация метода верхней релаксации для решения разностной схемы.

Чтобы метод верхней релаксации начал работу нужно задать начальное приближение:

$v^{(0)}(x, y) = \{v_{ij}^{(0)}\}, i = 0, n; j = 0, m$ - это приближение к $v(x, y)$.

Кроме того нужен критерий остановки по точности ϵ и по числу итераций N_{\max} . Метод гонит $v^{(s)}(x, y) = \{v_{ij}^{(s)}\}, s = 1, 2, \dots$. По одному из критериев остановки один из этих $v^{(s)}$ будет принять за

точное решение разностной схемы: либо $s+1 \geq N_{\max}$, либо $\max_{ij} |v_{ij}^{(s)} - v_{ij}^{(s-1)}| \leq \epsilon$.

Итог работы метода $v^{(s)}$ можно рассматривать либо как $v(x, y) \sim v^{(s)}(x, y)$, либо как $u(x, y) \sim v^{(s)}(x, y)$.

1) Основная задача: $u(x, y)$ неизвестен, можно найти $v^{(s)}(x, y)$ на сетке (n, m) , найти $v^{(s+1)}(x, y)$ на сетке $(2n, 2m)$ и сравнить их.

2) Тест №1: $u(x, y)$ -известно, $u(x, y) \neq v(x, y)$ (точное решение дифференциальной задачи не совпадает с точным решением разностной схемы).

Можно сравнить $\max_{i, j} |u_{ij} - v_{ij}^{(s)}|$

3) Тест №2: $u(x,y)$ – известно, $u(x,y)=v(x,y)$. Можно сравнивать $\max_{i,j} |u_{ij} - v_{ij}^{(s)}|$. Можно отследить, как метод релаксации подкрадывается к решению линейной системы.

Главная задача – решить тест №1 с хорошей точностью: $\max_{i,j} |\hat{u}_{ij} - \hat{v}_{ij}^{(s)}| \leq \epsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$

\hat{u}_{ij} – это u_{ij} в исполнении компьютера, $\hat{v}_{ij}^{(s)}$ – это решение метода верхней релаксации в исполнении компьютера.

Для того, чтобы решить задачу с высокой точностью нужно подобрать сетку (n,m) , подобрать начальное приближение $(v^{(0)})$, метод (M) , критерий остановки (ϵ_1) и N_{\max} .

Принцип:

$$\max_{i,j} |\hat{u}_{ij} - \hat{v}_{ij}^{(s)}| = \max_{i,j} |\hat{u}_{ij} - u_{ij} + u_{ij} - v_{ij} + v_{ij} - v_{ij}^{(s)} + v_{ij}^{(s)} - \hat{v}_{ij}^{(s)}| \leq$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{выч. прошлой кратн.} & \text{пог. реш. для} & \text{пог. реш. для} & \text{вывод} & \text{реш. метода} \\ \text{ГЕНЕРАЦИЯ} & \text{ГЕНЕРАЦИЯ} & \text{ГЕНЕРАЦИЯ} & \text{ГЕНЕРАЦИЯ} & \text{ГЕНЕРАЦИЯ} \\ \leq \max_{i,j} |\hat{u}_{ij} - u_{ij}| + & \max_{i,j} |u_{ij} - v_{ij}| & + \max_{i,j} |v_{ij} - v_{ij}^{(s)}| & + & \max_{i,j} |v_{ij}^{(s)} - \hat{v}_{ij}^{(s)}| & \leq \epsilon & (3) \\ \text{умен. за счет сетки} & \text{умень. за счет} & \text{умень. за счет} & \text{увелич. при увелич. числа итераций} & & & \end{array}$$

С помощью ω меняем метод, а с помощью ϵ_1 – заставляем метод считаться дольше.

Чтобы выполнить неравенство (3) нужно подобрать $v^{(0)}$, ϵ , ω , n и m так, чтобы каждое слагаемое (3) было меньше $\epsilon/4$.

$\max_{i,j} |u_{ij} - v_{ij}| \leq \epsilon \Rightarrow$ нужна густая сетка, если сетка большая \Rightarrow матрица разностной схемы будет

иметь большую размерность \Rightarrow скорость сходимости метода верхней релаксации зависит от размерности матрицы.

Проблема состоит в том, что на густых сетках приходиться применять очень медленных методы.
Решение: на каждой сетке свой метод верхней релаксации.

Что делать:

- | | |
|---------|---|
| 1 сетка | $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Решить тест №1 с точностью } 0.5 \cdot 10^{-6} \\ 2. \text{ Написать метод ВР для Дирихле (к/р)} \\ 3. \text{ подключить ВР к системе} \end{array} \right.$ |
| 2 сетка | $\left\{ \begin{array}{l} 4. \text{ сделать другой итерационный метод и подключить к системе} \\ 5. \text{ Решить задачу Дирихле в нестандартной области} \end{array} \right.$ |

Разностная схема задачи Дирихле и анализ погрешностей аппроксимации.

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x, y) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad x \in [0,1] \\ u(0, y) = \mu_1(y) \quad u(x, 0) = \mu_3(x) \quad u(1, y) = \mu_2(y) \quad u(x, 1) = \mu_4(x) \end{cases} \quad y \in [0,1]$$

уравнение должно выполняться на открытом множестве.

$u(x,y)$ – прогиб квадратной мембранны в точке (x,y)

Края мембранны закреплены $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ и она находится под внешним воздействием $f(x,y)$.

Другой пример: $u(x,y)$ – температура квадратной пластины, на краях которой

поддерживается заданная температура μ_i .

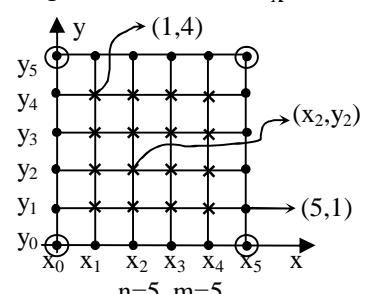
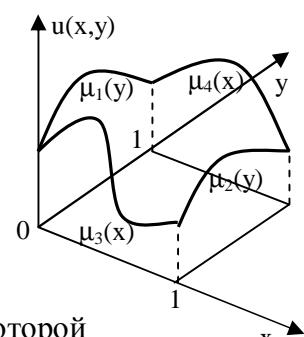
Боковые поверхности теплоизолированы и имеют поверхностные источники тепла f .

$x_i = ih$, $i=0, n$; $h=1/n$; $y_j = jk$, $j=0, m$; $k=1/m$

(x_i, y_j) – узел сетки

• - граничные, \times - внутренние, Θ - граничные угловые.

В граничных угловых функциях μ должны стыковаться друг с другом.



Лекция №14.

$$x_{i \pm 1} = x_i \pm h \quad y_{j \pm 1} = y_j \pm k$$

Рассмотрим функцию $u(x, y)$

$$\left(u_{xx} \right)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (5) \quad \left(u_{yy} \right)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} \quad (6)$$

Утверждение:

Если $u(x, y)$ – достаточно гладкая, то разностные операторы (5), (6) аппроксимируют $u_{xx}|_{x_i:y_j}$, $u_{yy}|_{x_i:y_j}$ со вторым порядком по h и k соответственно.

$$u_{xx}|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \left(u_{xx} \right)_{ij} + O(h^2) \quad u_{yy}|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \left(u_{yy} \right)_{ij} + O(k^2)$$

Доказательство: рассмотрим

$$u(x, y), \text{ пусть } \varphi(x) = u(x, y_j) \quad \varphi''(x_i) = \frac{\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})}{h^2} + \frac{h^2}{12} \varphi^{IV}(\xi), \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

$$\text{по определению: } \varphi''(x_i) = u_{xx}|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}}; \quad \frac{\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})}{h^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{h^2}{12} \varphi^{IV}(\xi) = u_{xxxx}|_{\substack{x=\xi \\ y=y_j}}, \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]; \quad \varphi''(x_i) = u_{xx}|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(\xi)|_{\substack{x=\xi \\ y=y_j}} \quad (7)$$

$$(8) \quad u_{yy}|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{k^2} + \frac{k^2}{12} u_{yyyy}|_{\substack{x=x_i \\ y=\zeta}}, \zeta \in [y_{j-1}, y_{j+1}]$$

Разностная схема задачи Дирихле.

$$(1) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -f(x, y); \quad x \in (0,1); y \in (0,1) \\ u(0, y) = \mu_1(y); u(1, y) = \mu_2(y); u(x, 0) = \mu_3(x); u(x, 1) = \mu_4(x) \end{cases} \quad u(x, y) = ?, f, \mu_{1,2,3,4} - \text{известны}$$

$$x_i = ih, \quad h = 1/n, \quad i = 0, n; \quad y_j = jk, \quad k = 1/m, \quad j = 0, m.$$

Уравнение должно выполняться в любом внутреннем узле.

Аппроксимируем основное уравнение задачи Дирихле во внутренних узлах с помощью разностных операторов, а граничные условия запишем точно:

$$(9) \begin{cases} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{k^2} = -f_{ij} & i = 0, n; \quad j = 0, m \\ u_{0,j} = \mu_1(y_j) = \mu_{1,j} \quad u_{i,0} = \mu_3(x_i) = \mu_{3,i} \\ u_{n,j} = \mu_2(y_j) = \mu_{2,j} \quad u_{im} = \mu_4(x_i) = \mu_{4,i} \\ j = 0, m \quad i = 0, n \end{cases}$$

Основное уравнение в точке x_i, y_j аппроксимируется разностным уравнением.

Очевидно, что значение функции в граничных угловых узлах не влияет на решение разностной схемы в обычных граничных и внутренних узлах, поэтому в аппроксимации граничных условий используют вместо $j=0, m - j=1, m-1$; вместо $i=0, n - i=1, n-1$.

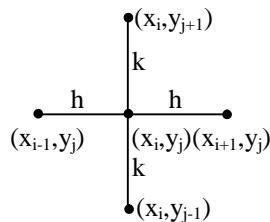
Дальше в схеме (9) вместо u используют v .

$$(10) \begin{cases} \left(v_{xx} \right)_{ij} + \left(v_{yy} \right)_{ij} = -f_{ij} & i = 1, n-1; \quad j = 1, m-1; \\ v_{0,j} = \mu_{1,j}; \quad v_{i,0} = \mu_{3,i}; \quad v_{n,j} = \mu_{2,j}; \quad v_{im} = \mu_{4,i} \end{cases}$$

u_{ij} – точное решение (1) в узлах сетки; v_{ij} – точное решение схемы (10)

Утверждение:

Если точное решение задачи (1) является достаточно гладким, то разностная схема (10) аппроксимирует это решение со 2-м порядком по h и k .



Погрешность решения задачи (1), можно вычислить с помощью схемы (10): $z_{ij} = u_{ij} - v_{ij}$; $i=0,n$; $j=0,m$.
 ψ - погрешность аппроксимации: Ψ_{ij} - это невязка уравнения, ассоциированного с узлом ij , на решении дифференциальной задачи (1). Для $i=1,n-1$; $j=1,m-1$ (для внутренних узлов):

$$\begin{aligned}\Psi_{ij} &= \left(u_{xx} \right)_{ij} + \left(u_{yy} \right)_{ij} + f_{ij} - \left(u_{xx} + u_{yy} + f(x, y) \right) \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \left(u_{xx} \right)_{ij} - u_{xx}(x_i, y_j) + \left(u_{yy} \right)_{ij} - u_{yy}(x_i, y_j) = \\ &= -\frac{h^2}{12} u_{xxxx}^{IV}(\xi, y_j) - \frac{k^2}{12} u_{yyyy}^{IV}(x_i, \zeta), \quad \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]; \quad \zeta \in [y_{j-1}, y_{j+1}] \\ \Rightarrow \Psi_{ij} &= -\frac{1}{12} (h^2 u_{xxxx}^{IV}(\xi, y_j) + k^2 u_{yyyy}^{IV}(x_i, \zeta)) \quad (11)\end{aligned}$$

Для граничных точек: $\Psi_{0j} = u_{0j} - \mu_{1j} = 0$ $j = 1, m-1$; $\Psi_{nj} = 0$; $\Psi_{i0} = 0$; $\Psi_{im} = 0$ - погрешности аппроксимации нулевые.

Следствие:

$$\max_{\substack{i=0,n \\ j=0,m}} |\Psi_{ij}| \leq \frac{1}{12} (h^2 + k^2) M, \text{ где } M = \max_{\substack{x \in (0,1) \\ y \in (0,1)}} \{ |u_{xxxx}^{IV}(x, y)|, |u_{yyyy}^{IV}(x, y)| \} - \text{не зависит от сетки}$$

Это доказательство порядка аппроксимации, но еще не доказательство сходимости.

Анализ разностной схемы и обоснование применения итерационных методов линейной алгебры.

Рассмотрим схему (10) и запишем ее в матричном виде на примере сетки (5*5).

Схема (1) является линейной системой уравнений относительно v_{ij} , а именно линейной системой относительно значений сеточной функции во внутренних узлах.

Для сетки (n,m) неизвестный вектор будет записываться в виде:

$$v = (v_{11}, v_{21}, \dots, v_{n-11}, v_{12}, v_{22}, \dots, v_{n-12}, \dots, v_{1m-1}, v_{2m-1}, \dots, v_{n-1m-1}) \in R^{(n-1)(m-1)}$$

Матрица линейной системы $(n-1)(m-1) \times (n-1)(m-1)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	A	$\frac{1}{h^2}$	0	0	$\frac{1}{k^2}$	0	0	0							
2	$\frac{1}{h^2}$	A	$\frac{1}{h^2}$	0	0	$\frac{1}{k^2}$	0	0				0			0
3	0	$\frac{1}{h^2}$	A	$\frac{1}{h^2}$	0	0	$\frac{1}{k^2}$	0							
4	0	0	$\frac{1}{h^2}$	A	0	0	0	$\frac{1}{k^2}$							
5															
6					*										
7															
8															
9															
10															
11	0														
12															
13															
14	0														*
15															
16															

$A = -\left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2}\right)$, правая часть – смотрите практику. Матрица разностной схемы имеет блочно – диагональную структуру. Каждый из диагональных блоков (*) сам является 3-х диагональной матрицей, а каждый из блоков (v) – является диагональной матрицей. Остальные блоки нулевые. Матрица имеет большую размерность и сильно разряжена.

Лекция №15.

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x, y) & \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & x \in [0, 1] \\ u(0, y) = \mu_1(y) & u(x, 0) = \mu_3(x) & u(1, y) = \mu_2(y) & u(x, 1) = \mu_4(x) & y \in [0, 1] \end{cases} \quad (1)$$

Сетка: $x_i = ih$, $i=0, n$; $h=1/n$; $y_j = jk$, $j=0, m$; $k=1/m$

$u = \{u_{ij}\}$ - точное решение задачи Дирихле $v = \{v_{ij}\}$ - точное решение разностной схемы.

$$(10) \begin{cases} \left(v_{xx}\right)_{ij} + \left(v_{yy}\right)_{ij} = -f_{ij} & i = 1, n-1; \quad j = 1, m-1; \\ v_{0j} = \mu_{1j}; \quad v_{i0} = \mu_{3i}; \quad v_{nj} = \mu_{2j}; \quad v_{im} = \mu_{4i} \end{cases}$$

Утверждение:

Разностная схема (10) в матричном виде записывается для вектора

$v = (v_{11}, v_{21}, \dots, v_{n-11}, v_{12}, v_{22}, \dots, v_{n-12}, \dots, v_{1m-1}, v_{2m-1}, \dots, v_{n-1m-1})$ (доказательство очевидно)

(m-1)(n-1) блоков в матрице, блоки будут иметь размерность $(n-1)(n-1)$. Ненулевыми являются блоки, стоящие на главной диагонали, а так же блоки, стоящие над и под главной диагональю. Блок на главной диагонали:

$$(*) = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{h^2} & 0 &] & 0 \\ \frac{1}{h^2} & A & \frac{1}{h^2} & \diagdown & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & A &] & 0 \\ \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & A \end{pmatrix}; \text{Блоки над и под главной диагональю } (V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} & 0 &] & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2} &] & 0 \\ \wedge & \wedge & \wedge & \wedge \\ 0 & 0 &] & \frac{1}{k^2} \end{pmatrix}$$

$A = -\left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2}\right)$. Разностная схема (10) для сетки 5×5 имеет вид, (см распечатку, или как в прошлой лекции). Проверим, что распечатка соответствует схеме (10): рассмотрим уравнение,

ассоциированное с v_{11} :

$$v_{11} \left(-2 \frac{1}{h^2} - 2 \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{h^2} v_{21} + \frac{1}{k^2} v_{12} + \frac{1}{h^2} v_{01} + \frac{1}{k^2} v_{10} = -2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) v_{11} + \frac{1}{h^2} v_{21} + \frac{1}{k^2} v_{12} = -f_{11} - \frac{1}{h^2} \mu_{11} - \frac{1}{k^2} \mu_{31}$$

Это уравнение соответствует 1-й строке матричной записи. (Д/з проверить распечатку для узла v_{22}) Систему на распечатке будем записывать: $Av=F$ (11)

Утверждение:

В линейной системе уравнений: $-Av=-F$ (12) – матрица симметрична, не вырождена, положительно определена и система может быть решена методами Зейделя или верхней релаксации, при $\omega \in (0, 2)$.

Доказательство: по схеме: 1. A – симметрична; 2. A – не вырождена; 3. A – имеет отрицательные собственные числа; 4. из отрицательности собственных чисел \Rightarrow отрицательная определенность A ; 5. если A – отрицательно определена $\Rightarrow -A$ – положительно определена; 6. возможность применения методов Зейделя и ВР. (теорема о достаточном условии сходимости этих методов).

То есть мы докажем, что $-A$ – симметричная и положительно определенна.

- 1) Симметричность – очевидна.

2) Докажем, что А – невырожденная.

$\Omega_{h,k}$ – все узлы, кроме угловых; $\gamma_{h,k}$ – граничные узлы (без угловых); $\omega_{h,k}$ – внутренние узлы.

$\mathcal{W}(x_i, y_j)$ – это шаблон узла – множество всех узлов, которые используются в уравнении разностной схемы, ассоциированные с узлом (i,j) .

Если $(x_i, y_j) \in \omega_{h,k}$, то $\mathcal{W}_{ij} = \{(x_i, y_j), (x_{i\pm 1}, y_{j\pm 1})\}$, если $(x_i, y_j) \in \gamma_{h,k}$, то в (10) $\mathcal{W}_{ij} = \{(x_i, y_j)\}$.

Окрестность узла (x_i, y_j) : $\mathcal{W}'_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{W}_{ij} \setminus (x_i, y_j)$. Если $(x_i, y_j) \in \gamma_{h,k} \Rightarrow \mathcal{W}'_{ij} = \emptyset$.

При доказательстве утверждения будем различать 2 типа внутренних узлов:

1) $(x_i, y_j) \in \omega_{h,k}$ и окрестность \mathcal{W}'_{ij} содержит только внутренние узлы.

2) $(x_i, y_j) \in \omega_{h,k}$ и окрестность \mathcal{W}'_{ij} содержит хотя бы один граничный узел.

$\mathcal{W}'_{22} = \{(1,2), (2,1), (3,2), (2,3)\}$ $\mathcal{W}'_{11} = \{(1,0), (0,1), (1,2), (2,1)\}$

Покажем, что А не вырождена, т.е., что система на распечатке имеет только нулевое решение.

(13) покажем, что $Av=0$ – имеет нулевое решение $v=0$.

Пусть это не так \Rightarrow существует (i,j) , что решение $v_{ij} \neq 0$: $\max_{\substack{i=1, n-1 \\ j=1, m-1}} |v_{ij}| = c$, $c > 0$ и $\exists (i, j)$, что $v_{ij} = c$

Два случая:

1. нетривиальное решение уравнения (13) имеет одинаковые компоненты, т.е. $\forall i, j \quad v_{ij} = c > 0$.
2. нетривиальное решение уравнения (13) имеет разные компоненты, т.е. $\exists (i, j) \quad v_{ij} = c > 0$ и $\exists (i^*, j^*) \quad v_{i^* j^*} < c$.

1) Проведем доказательство для сетки 5×5 .

$$-2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)v_{11} + \frac{1}{h^2}v_{21} + \frac{1}{k^2}v_{12} = 0; \quad -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)c = 0 \Rightarrow c = 0$$

\Rightarrow нетривиальное решение уравнения (13) не может иметь одинаковые компоненты.

2) Предположим, что (i, j) такое, что $v_{ij} = c > 0$ и \mathcal{W}'_{ij} содержит граничные узлы:

$$-2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)v_{ij} + \frac{1}{h^2}v_{i-1,j} + \frac{1}{h^2}v_{i+1,j} + \frac{1}{k^2}v_{ij+1} + \frac{1}{k^2}v_{ij-1} = 0$$

Предположим, что отсутствуют слагаемые для $v_{i-1,j}$:

$$-\frac{1}{h^2}(v_{ij} - v_{i+1,j}) - \frac{1}{h^2}v_{ij} - \frac{1}{k^2}(v_{ij} - v_{ij+1}) - \frac{1}{k^2}(v_{ij} - v_{ij-1}) < 0, \text{ но это невозможно.}$$

То есть отсюда следует, что максимальное по модулю нетривиальное решение системы (13) не может достигаться в узле, в окрестности которого есть граничный узел.

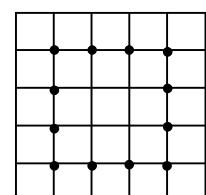
Максимальное по модулю нетривиальное решение системы (13) не может быть в узлах \bullet .

Пусть (i, j) такой, что $v_{ij} = c > 0$ и \mathcal{W}'_{ij} содержит только внутренние узлы, тогда для v_{ij} из (10) следует:

$$-\frac{1}{h^2}(v_{ij} - v_{i-1,j}) - \frac{1}{h^2}(v_{ij} - v_{i+1,j}) - \frac{1}{k^2}(v_{ij} - v_{ij+1}) - \frac{1}{k^2}(v_{ij} - v_{ij-1}) = 0$$

для всех узлов из \mathcal{W}'_{ij} $v=c$ и для всех узлов $v_{i'j'}=c$, $(i', j') \in \mathcal{W}'_{ij}$. Сетка 5×5 имеет всего 4 узла такого типа. Предположим, что максимум достигается в узле $(2,3)$, т.е. $v_{23}=c$. Из предыдущего пункта следует, что $v_{13}=v_{33}=v_{22}=v_{24}=c>0$. \mathcal{W}'_{13} содержит граничный узел \Rightarrow максимальное значение не может достигаться в узле $(1,3)$. Таким образом уравнение (13) может иметь только рнлувое решение.

Комментарий к 2: Чтобы доказать утверждение для более густых сеток можно двигаться по окрестностям от любого внутреннего узла до любого другого, в окрестности которого есть граничный узел.



Лекция №16. Свойства матрицы $A = A^T > 0$:

Утверждение:

$A = A^T \Rightarrow$ все ее собственные числа действительные и существует ортонормированный базис из собственных векторов (доказательство из ГА).

Определение:

Матрица A называется положительно определенной $A > 0$, если $\forall h \neq 0 \quad (Ah, h) > 0$.

Утверждение: о связи собственных чисел и положительной определенности

(Если $A = A^T > 0$) \Rightarrow (все собственные числа > 0)

Доказательство: пусть λ - собственное число, v – собственный вектор: $Av = \lambda v$. Для этого v :

$(Av, v) = (\lambda v, v) = \lambda(v, v) > 0$, $\lambda > 0$ – такие рассуждения можно повторить для любого собственного числа.

Обратное утверждение:

(Если $A = A^T$ – симметрична и все ее собственные числа > 0) \Rightarrow ($A > 0$)

Доказательство: $A = A^T \Rightarrow \exists v_1, \dots, v_n$ (ортонормированный базис из собственных векторов) их собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\forall h \neq 0$ верно:

$$h = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \text{ где } \exists \alpha_i \neq 0. \text{ Тогда } (Ah, h) = \left(A \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 (v_i, v_i) > 0, \text{ т.к. } \exists \alpha_i \neq 0 \Rightarrow (Ah, h) > 0$$

Вернемся к лабе Дерихле.

$$(1) \begin{cases} \Delta u = -f(x, y) & \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & x \in [0, 1] \\ u(0, y) = \mu_1(y) & u(x, 0) = \mu_3(x) & u(1, y) = \mu_2(y) \\ u(x, 1) = \mu_4(x) & \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} -2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) v_{ij} + \frac{1}{h^2} (v_{i-1,j} + v_{i+1,j}) + \frac{1}{k^2} (v_{ij-1} + v_{ij+1}) = -f_{ij} \\ v_{0,j} = \mu_{1j}; v_{nj} = \mu_{2j}; v_{i0} = \mu_{3i}; v_{im} = \mu_{4i} \end{cases}$$

(11) $Av = F$.

Исследуем собственные числа матрицы A , по теореме Гершгорина. Для этого нарисуем круги Гершгорина на комплексной плоскости:

Центр всех кругов в точке $A = -2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right)$

Радиусы кругов:

$$\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}; \quad \frac{2}{h^2} + \frac{1}{k^2};$$

$$\frac{1}{h^2} + \frac{2}{k^2}; \quad \frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2}$$

2. $\det A \neq 0$, значит 0 не является собственным числом

3. $A = A^T \Rightarrow$ все собственные числа < 0 .

4. $-A$ – симметрична $(-A) = (-A)^T$, $\det(-A) \neq 0 \Rightarrow$ все собственные числа положительны \Rightarrow $\Rightarrow (-A) = (-A)^T > 0$.

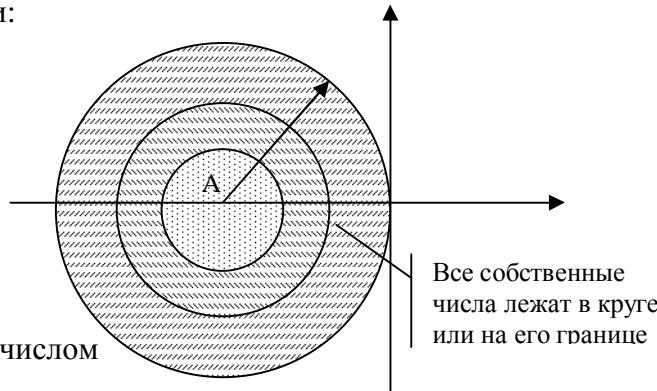
5. Систему можно решить методом Зейделя и Верхней Релаксации.

Реализация метода Зейделя в общем виде и для решения задачи Дирихле.

$Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \diagdown & a_{1n} \\ \wedge & \wedge & \wedge \\ a_{m1} &] & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ – вектор начального приближения.



Все собственные
числа лежат в круге
или на его границе

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(s+1)} = -\left(a_{12}x_2^{(s)} + \dots + a_{1n}x_n^{(s)}\right) + b_1 \\ a_{22}x_2^{(s+1)} = -\left(a_{21}x_1^{(s+1)} + a_{23}x_3^{(s)} + \dots + a_{2n}x_n^{(s)}\right) + b_2 \\ \dots \\ a_{jj}x_n^{(s+1)} = -\left(a_{j1}x_1^{(s+1)} + \dots + a_{j,j-1}x_{j-1}^{(s+1)} + a_{j+1}x_{j+1}^{(s)} + \dots + a_{jn}x_n^{(s)}\right) + b_j \\ \dots \\ a_{nn}x_n^{(s+1)} = -\left(a_{n1}x_1^{(s+1)} + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(s+1)}\right) + b_n \end{cases}$$

Остановка, когда $s+1 > N_{\max}$ или $\max |x_j^{(s)} - x_j^{(s-1)}| < \varepsilon_1$

Метода Зейделя для решения системы (10) задачи Дирихле:

Начальный шаг: Цикл по $j=1, m-1$ $v^{(0)}_{0j} \leftarrow \mu_{1j}$, $v^{(0)}_{nj} \leftarrow \mu_{2j}$

Цикл по $i=1, n-1$ $v^{(0)}_{i0} \leftarrow \mu_{3i}$, $v^{(0)}_{im} \leftarrow \mu_{4i}$

Цикл по $j=1, m-1$ Цикл по $i=1, n-1$ $v^{(0)}_{ij} \leftarrow 0$ (или что хотим)

//Массив заполнен $v^{(0)} = \{v^{(0)}_{ij}\}$, $i=0, n$; $j=0, m$:

//Нужно присвоить что-нибудь в граничных угловых узлах $v^{(0)}_{10} = \dots$ $v^{(0)}_{0m} = \dots$ $v^{(0)}_{n0} = \dots$ $v^{(0)}_{nm} = \dots$

Переход от шага s к шагу s+1:

Цикл по $j=1, m-1$ $v^{(s)}_{0j} \leftarrow \mu_{1j}$, $v^{(s)}_{nj} \leftarrow \mu_{2j}$

Цикл по $i=1, n-1$ $v^{(s)}_{i0} \leftarrow \mu_{3i}$, $v^{(s)}_{im} \leftarrow \mu_{4i}$

Присвоили что-нибудь в граничных угловых узлах: $v^{(s)}_{10} = \dots$ $v^{(s)}_{0m} = \dots$ $v^{(s)}_{n0} = \dots$ $v^{(s)}_{nm} = \dots$

$$(14) \begin{cases} \text{Цикл по } j = 1, m-1 \\ \text{Цикл по } i = 1, n-1 \\ v_{ij}^{(s+1)} = \frac{\frac{1}{k^2}v_{ij-1}^{(s+1)} + \frac{1}{h^2}v_{i-1j}^{(s+1)} + \frac{1}{k^2}v_{ij+1}^{(s)} + \frac{1}{h^2}v_{i+1j}^{(s)}}{2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)} \end{cases}$$

Утверждение: Реализация метода Зейделя для системы (10) имеет вид (14). (см. Av=F – распечатка)

- 1) Пусть узел (x_i, y_j) таков, что \mathcal{W}_{ij} не содержит граничных узлов \Rightarrow в матрице A узлу (x_i, y_j) соответствует строка в которой пять не равных нулю элементов. Формула (14) очевидна.
- 2) Пусть узел (x_i, y_j) такой, что \mathcal{W}_{ij} содержит граничные узлы: (Например, рассмотрим (x_1, y_1))

$$(14) 2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)v_{11}^{(s+1)} - \frac{1}{h^2}v_{22}^{(s)} - \frac{1}{k^2}v_{21}^{(s)} = f_{11} + \frac{1}{h^2}v_{01}^{(s+1)} + \frac{1}{k^2}v_{10}^{(s+1)}$$

Эскиз программы метода Зейделя для Дирихле:

$v[i][j]$, $i=0, n$; $j=0, m$ – массив для хранения сеточной функции.

Присвоение граничных условий:

Цикл по $j=1, m-1$, $v[0][j] = \mu_{1j}$ $v[n][j] = \mu_{2j}$

Цикл по $i=1, n-1$, $v[i][0] = \mu_{3i}$ $v[i][m] = \mu_{4i}$

Цикл по $j=1, m-1$ Цикл по $i=1, n-1$ $v[i][j] = 0$ (например)

$s=0$; do while ($s < N_{\max}$)

Цикл по $j=1, m-1$ Цикл по $i=1, n-1$

$$v[i][j] = \frac{\frac{1}{h^2}(v[i-1][j] + v[i+1][j]) + \frac{1}{k^2}(v[i][j-1] + v[i][j+1]) + f(ih, jk)}{2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)}$$